

『離散構造』後半のポイント

2015年12月18日(海野)

1 関係

- 関係の数学的な表現に慣れ、定義通りに正確に操作できること
- 2項関係 R が下の性質を満たしているかどうかを判定できること
 - R が反射的: $\forall x(xRx)$
 - R が対称的: $\forall x\forall y(xRy \Rightarrow yRx)$
 - R が推移的: $\forall x\forall y\forall z(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
 - R が反対称的: $\forall x\forall y(xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$
 - R が半順序: R が反射的かつ推移的かつ反対称的
 - R が同値関係: R が反射的かつ対称的かつ推移的
- 関係 $R \subset A \times B$ と $S \subset B \times C$ の合成関係 $R \circ S = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \in B(xRz \wedge zSy)\} \subset A \times C$ の計算

2 グラフと木

- 無向グラフと有向グラフの数学的な表現に慣れ、頂点の集合や辺の集合が論理式を使って定義されていても、定義通りに正確に作図したり操作したりできること
- 2項関係を有向グラフとして解釈できること
- グラフの位数(頂点の数)、サイズ(辺の数)、頂点の次数を計算できること
- グラフの道、単純道、閉路、連結成分の数を数えられること
 - 頂点 v_1 から v_n へ至る道とは、頂点の列 $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ のうち、 $n \geq 1$ かつすべての $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ について $\langle v_i, v_{i+1} \rangle$ がグラフの辺であるもの(ここで $n-1$ を道の長さという)
 - 単純道とは同じ辺を2回以上通らない道
 - 閉路とは始点と終点と同じである長さ1以上の単純道
 - G の連結成分とは、 G の連結部分グラフのうち極大なもの(複数ありうる)
 - * どの2つの頂点間にも道が存在するとき、グラフは連結であるという
 - * ここで極大とは、連結成分を真に包含する G の連結部分グラフが存在しないという条件
- 木の2つの(等価な)定義を理解すること
 1. 根とよばれる特別な頂点が存在し、すべての頂点から根に至る単純道が唯一存在する無向グラフ
 2. 根とよばれる特別な頂点が存在し、連結で閉路がない無向グラフ
- 子に順序がある木を順序木ということ

頂点 v から v への長さ 0 の道 $\langle v \rangle$ が存在するので、頂点 v だけからなる連結成分や木も存在しうる

閉路は長さ 1 以上なので、道 $\langle v \rangle$ は閉路ではない

閉路は単純道なので、2つの頂点 v_1, v_2 を同じ辺を通って行ったり来たりして戻ってくる $\langle v_1, v_2, v_1, v_2, v_1 \rangle$ のような道は閉路ではない

3 帰納的定義と帰納法

- 集合を帰納的に定義できること
 - 特に、与えられた条件を満たす自然数、リスト、文字列、木の集合を定義できること
- 定義域が帰納的に定義された集合である関数を帰納的に定義できること
- 帰納的に定義された集合や関数を定義通りに正確に操作できること
 - 帰納的に定義された集合にある要素が入っているかどうかを定義にたしかえて判定できること
 - 帰納的に定義された関数がある引数に適用したときの戻り値を、定義通り正確に計算できること
- 帰納的に定義された集合や関数に関する性質を帰納法を使って証明できること
 - 自然数、リスト、文字列、木の集合や関数に関する帰納法

4 進んだ学習、話題

- 関係
 - 関係代数 (関係データベースの基礎)
- グラフと木
 - データ構造とアルゴリズム
 - * グラフが一筆書き可能かどうかの判定
 - * 最短路探索
 - * 組合せ最適化
 - * ...
- 帰納的定義と帰納法
 - 関数型プログラミング (OCaml, Haskell, Lisp)
 - プログラム検証 (プログラムが望ましい性質 (仕様) を満たすことを形式的に証明)

5 期末試験について

日時 2015/12/25 (金) 3-4 限; 12:15 までに下記教室に集合すること (遅刻厳禁)

場所 3A301 教室 (いつもの教室)

試験時間 120 分の予定

注意事項 資料等の持ち込みは不可 (ただし、留学生が辞書を持ち込む場合は試験開始時に許可を得れば可能)