『離散構造』6 章 (帰納) の演習問題

出題: 2015 年 12 月 11 日

期限: 2015 年 12 月 18 日の授業

問題 1 (集合の帰納的定義)

(a) 自然数のリストのうち、隣り合う要素の和が 10 であるものからなる集合 L を帰納的に定義しなさい。例えば $\langle\rangle, \langle 3,7,3,7\rangle, \langle 1,9,1\rangle \in L$ である。

(b) 文字集合（アルファベット）$\{a, b\}$ 上の文字列のうち、ある $n \geq 0$ について a が n 個並んだ後に b が n 個並んだものからなる集合 S を帰納的に定義せよ。例えば $aaabbb \in S$ だが $aabbb \notin S$ である。

問題 2 (関数の帰納的定義)

文字集合（アルファベット）$\Sigma = \{[,], !, \&, |, X, T, F\}$ 上の文字列集合 B を以下のように帰納的に定める。

- $X, T, F \in B$
- $e \in B$ ならば $!e \in B$
- $e_1, e_2 \in B$ ならば $[e_1 \ \& \ e_2] \in B$
- $e_1, e_2 \in B$ ならば $[e_1 \mid e_2] \in B$

このように定義された集合 B に対して関数 $f : B \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ と $g : B \to B$ を次のように帰納的に定める。

$$f(e,n) = \begin{cases} n & (\text{if } e = X) \\ 1 & (\text{if } e = T) \\ 0 & (\text{if } e = F) \\ 1 - f(e_1, n) & (\text{if } e = !e_1) \\ f(e_1, n) \times f(e_2, n) & (\text{if } e = [e_1 \ \& \ e_2]) \\ \min(1, f(e_1, n) + f(e_2, n)) & (\text{if } e = [e_1 \mid e_2]) \end{cases} \qquad g(e) = \begin{cases} !X & (\text{if } e = X) \\ F & (\text{if } e = T) \\ T & (\text{if } e = F) \\ e_1 & (\text{if } e = !e_1) \\ [g(e_1) \mid g(e_2)] & (\text{if } e = [e_1 \ \& \ e_2]) \\ [g(e_1) \ \& \ g(e_2)] & (\text{if } e = [e_1 \mid e_2]) \end{cases}$$

ここで $\min(a, b)$ は a,b のうち小さい方を返すものとする。関数 f, g に関して、以下の問に答えよ。

(a) $f([[T \ \& \ X] \mid F], 1)$ の値を求めよ。

(b) $f([X \mid !X], 0)$ の値を求めよ。

(c) $g([[T \ \& \ X] \mid F])$ の値を求めよ。

(d) $g([T \ \& \ [F \mid X]])$ の値を求めよ。

(e) 任意の $e \in B$ と $n \in \{0, 1\}$ について $f(e, n) \in \{0, 1\}$ であることを証明しなさい。

(f) 任意の $e \in B$ と $n \in \{0, 1\}$ について $f(e, n) = f(g(g(e)), n)$ であることを証明しなさい。