『離散構造』6 章 (帰納) の演習問題 解答例 (海野)

問題 1 (集合の帰納的定義)

(a) 自然数のリストのうち、隣り合う要素の和が 10 であるものからなる集合 L を帰納的に定義しなさい。例えば $\langle\rangle, \langle 3,7,3,7\rangle, \langle 1,9,1\rangle \in L$ である。

答. そのような集合 L は以下を満たす最小の集合として帰納的に定義される。

- $\langle\rangle \in L$
- $\forall n(n \in \mathcal{N} \Rightarrow \langle n\rangle \in L)$
- $\forall n, l(n \in \mathcal{N} \wedge l \in L \wedge n + \mathrm{head}(l) = 10 \Rightarrow \mathrm{cons}(n, l) \in L)$

(b) 文字集合（アルファベット）$\{a, b\}$ 上の文字列のうち、ある $n \geq 0$ について a が n 個並んだ後に b が n 個並んだものからなる集合 S を帰納的に定義せよ。例えば $aaabbb \in S$ だが $aabbb \notin S$ である。

答. S は以下を満たす最小の集合として帰納的に定義される。

- $\Lambda \in S$
- $\forall s(s \in S \Rightarrow a\ s\ b \in S)$

問題 2 (関数の帰納的定義)

文字集合（アルファベット）$\Sigma = \{[,], !, \&, |, X, T, F\}$ 上の文字列集合 B を以下のように帰納的に定める。

- $X, T, F \in B$
- $e \in B$ ならば $!e \in B$
- $e_1, e_2 \in B$ ならば $[e_1 \ \&\ e_2] \in B$
- $e_1, e_2 \in B$ ならば $[e_1 \mid e_2] \in B$

このように定義された集合 B に対して関数 $f : B \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ と $g : B \to B$ を次のように帰納的に定める。

$$f(e,n) = \begin{cases} n & (\text{if } e = X) \\ 1 & (\text{if } e = T) \\ 0 & (\text{if } e = F) \\ 1 - f(e_1, n) & (\text{if } e = !e_1) \\ f(e_1, n) \times f(e_2, n) & (\text{if } e = [e_1 \ \&\ e_2]) \\ \min(1, f(e_1, n) + f(e_2, n)) & (\text{if } e = [e_1 \mid e_2]) \end{cases} \qquad g(e) = \begin{cases} !X & (\text{if } e = X) \\ F & (\text{if } e = T) \\ T & (\text{if } e = F) \\ e_1 & (\text{if } e = !e_1) \\ [g(e_1) \mid g(e_2)] & (\text{if } e = [e_1 \ \&\ e_2]) \\ [g(e_1) \ \&\ g(e_2)] & (\text{if } e = [e_1 \mid e_2]) \end{cases}$$

ここで $\min(a, b)$ は a,b のうち小さい方を返すものとする。関数 f, g に関して、以下の問に答えよ。

(a) $f([[T \ \&\ X] \mid F], 1)$ の値を求めよ。答.

$$\begin{aligned} f([[T \ \&\ X] \mid F], 1) &= \min(1, f([T \ \&\ X], 1) + f(F, 1)) && (\text{fの定義による}) \\ &= \min(1, f(T, 1) \times f(X, 1) + 0) && (\text{fの定義による}) \\ &= \min(1, 1 \times 1 + 0) && (\text{fの定義による}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b) $f([X \mid !X], 0)$ の値を求めよ。

答.

$$\begin{array}{rcll} f([X \mid !X], 0) & = & \min(1, f(X,0) + f(!X,0)) & (\text{f}\text{の定義による}) \\ & = & \min(1, 0 + (1 - f(X,0))) & (\text{f}\text{の定義による}) \\ & = & \min(1, 0 + (1 - 0)) & (\text{f}\text{の定義による}) \\ & = & 1 & \end{array}$$

(c) $g([[T \ \& \ X] \mid F])$ の値を求めよ。

答.

$$\begin{array}{rcll} g([[T \ \& \ X] \mid F]) & = & [g([T \ \& \ X]) \ \& \ g(F)] & (\text{g}\text{の定義による}) \\ & = & [[g(T) \mid g(X)] \ \& \ T] & (\text{g}\text{の定義による}) \\ & = & [[F \mid !X] \ \& \ T] & (\text{g}\text{の定義による}) \end{array}$$

(d) $g([T \ \& \ [F \mid X]])$ の値を求めよ。

答.

$$\begin{array}{rcll} g([T \ \& \ [F \mid X]]) & = & [g(T) \mid g([F \mid X])] & (\text{g}\text{の定義による}) \\ & = & [F \mid [g(F) \ \& \ g(X)]] & (\text{g}\text{の定義による}) \\ & = & [F \mid [T \ \& \ !X]] & (\text{g}\text{の定義による}) \end{array}$$

(e) 任意の $e \in B$ と $n \in \{0,1\}$ について $f(e,n) \in \{0,1\}$ であることを証明しなさい。

答. $n \in \{0,1\}$ と仮定し、e に関する帰納法で証明する。

- case $e = X$:

$$\begin{array}{rcll} f(X,n) & = & n & (\text{f}\text{の定義による}) \\ & \in & \{0,1\} & (\text{仮定による}) \end{array}$$

- case $e = T$:

$$\begin{array}{rcll} f(T,n) & = & 1 & (\text{f}\text{の定義による}) \\ & \in & \{0,1\} & \end{array}$$

- case $e = F$:

$$\begin{array}{rcll} f(F,n) & = & 0 & (\text{f}\text{の定義による}) \\ & \in & \{0,1\} & \end{array}$$

- case $e = !e_1$: 帰納法の仮定より、$f(e_1,n) \in \{0,1\}$ である。

$$\begin{array}{rcll} f(!e_1,n) & = & 1 - f(e_1,n) & (\text{f}\text{の定義による}) \\ & \in & \{0,1\} & (\text{帰納法の仮定による}) \end{array}$$

- case $e = [e_1 \ \& \ e_2]$: 帰納法の仮定より、$f(e_1,n) \in \{0,1\}$ かつ $f(e_2,n) \in \{0,1\}$ である。

$$\begin{array}{rcll} f([e_1 \ \& \ e_2],n) & = & f(e_1,n) \times f(e_2,n) & (\text{f}\text{の定義による}) \\ & \in & \{0,1\} & (\text{帰納法の仮定による}) \end{array}$$

- case $e = [e_1 \mid e_2]$: 帰納法の仮定より、$f(e_1,n) \in \{0,1\}$ かつ $f(e_2,n) \in \{0,1\}$ である。

$$\begin{array}{rcll} f([e_1 \mid e_2],n) & = & \min(1, f(e_1,n) + f(e_2,n)) & (\text{f}\text{の定義による}) \\ & \in & \{0,1\} & (\text{帰納法の仮定による}) \end{array}$$

(f) 任意の $e \in B$ と $n \in \{0,1\}$ について $f(e,n) = f(g(g(e)),n)$ であることを証明しなさい。

答. e に関する帰納法で証明する。

- case $e = X$:

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) = f(g(g(X)),n) &= f(!!X,n) && (\text{gの定義による})\\ &= (1-(1-f(X,n))) && (\text{fの定義による})\\ &= f(X,n) = (\text{左辺})\end{aligned}$$

- case $e = T$:

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) = f(g(g(T)),n) &= f(T,n) && (\text{gの定義による})\\ &= (\text{左辺})\end{aligned}$$

- case $e = F$:

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) = f(g(g(F)),n) &= f(F,n) && (\text{gの定義による})\\ &= (\text{左辺})\end{aligned}$$

- case $e = !e_1$:

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) = f(g(g(!e_1)),n) &= f(g(e_1),n) && (\text{gの定義による})\\ &= f(!e_1,n) && (\text{補題による})\\ &= (\text{左辺})\end{aligned}$$

- case $e = [e_1\ \&\ e_2]$: 帰納法の仮定より、$f(e_1,n) = f(g(g(e_1)),n)$ かつ $f(e_2,n) = f(g(g(e_2)),n)$ である。

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) = f(g(g([e_1\ \&\ e_2])),n) &= f(g([g(e_1)\mid g(e_2)]),n) && (\text{gの定義による})\\ &= f([g(g(e_1))\ \&\ g(g(e_2))],n) && (\text{gの定義による})\\ &= f(g(g(e_1)),n)\times f(g(g(e_2)),n) && (\text{fの定義による})\\ &= f(e_1,n)\times f(e_2,n) && (\text{帰納法の仮定による})\\ &= f([e_1\ \&\ e_2],n) && (\text{fの定義による})\\ &= (\text{左辺})\end{aligned}$$

- case $e = [e_1 \mid e_2]$: 帰納法の仮定より、$f(e_1,n) = f(g(g(e_1)),n)$ かつ $f(e_2,n) = f(g(g(e_2)),n)$ である。

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) = f(g(g([e_1\mid e_2])),n) &= f(g([g(e_1)\ \&\ g(e_2)]),n) && (\text{gの定義による})\\ &= f([g(g(e_1))\mid g(g(e_2))],n) && (\text{gの定義による})\\ &= \min(1, f(g(g(e_1)),n)+f(g(g(e_2)),n)) && (\text{fの定義による})\\ &= \min(1, f(e_1,n)+f(e_2,n)) && (\text{帰納法の仮定による})\\ &= f([e_1\mid e_2],n) && (\text{fの定義による})\\ &= (\text{左辺})\end{aligned}$$

上の証明で使った補題として、すべての $e \in B$ と $n \in \{0,1\}$ について $f(g(e),n) = f(!e,n)$ が成り立つことを e の帰納法で証明する。

- case $e = X$:

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) = f(g(X),n) &= f(!X,n) && (\text{gの定義による})\\ &= (\text{右辺})\end{aligned}$$

- case $e = T$:

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) = f(g(T),n) &= f(F,n) && (\text{gの定義による})\\ &= 0 && (\text{fの定義による})\\ &= 1-f(T,n) && (\text{fの定義による})\\ &= f(!T,n) && (\text{fの定義による})\\ &= (\text{右辺})\end{aligned}$$

- case $e = F$:

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) = f(g(F), n) &= f(T, n) && (\text{gの定義による})\\
&= 1 && (\text{fの定義による})\\
&= 1 - f(F, n) && (\text{fの定義による})\\
&= f(!F, n) && (\text{fの定義による})\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

- case $e = !e_1$:

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) = f(g(!e_1), n) &= f(e_1, n) && (\text{gの定義による})\\
&= 1 - (1 - f(e_1, n))\\
&= f(!!e_1, n) && (\text{fの定義による})\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

- case $e = [e_1 \ \& \ e_2]$: 帰納法の仮定より、$f(g(e_1), n) = f(!e_1, n)$ かつ $f(g(e_2), n) = f(!e_2, n)$ である。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) = f(g([e_1 \ \& \ e_2]), n) &= f([g(e_1) \mid g(e_2)], n) && (\text{gの定義による})\\
&= \min(1, f(g(e_1), n) + f(g(e_2), n)) && (\text{fの定義による})\\
&= \min(1, f(!e_1, n) + f(!e_2, n)) && (\text{帰納法の仮定による})\\
&= \min(1, 2 - f(e_1, n) - f(e_2, n)) && (\text{fの定義による})\\
&= 1 - f(e_1, n) \times f(e_2, n) && ((e)\ \text{による})\\
&= 1 - f([e_1 \ \& \ e_2], n) && (\text{fの定義による})\\
&= f(![e_1 \ \& \ e_2], n) && (\text{fの定義による})\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

- case $e = [e_1 \mid e_2]$: 帰納法の仮定より、$f(g(e_1), n) = f(!e_1, n)$ かつ $f(g(e_2), n) = f(!e_2, n)$ である。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) = f(g([e_1 \mid e_2]), n) &= f([g(e_1) \ \& \ g(e_2)], n) && (\text{gの定義による})\\
&= f(g(e_1), n) \times f(g(e_2), n) && (\text{fの定義による})\\
&= f(!e_1, n) \times f(!e_2, n) && (\text{帰納法の仮定による})\\
&= (1 - f(e_1, n)) \times (1 - f(e_2, n)) && (\text{fの定義による})\\
&= 1 - \min(1, f(e_1, n) + f(e_2, n)) && ((e)\ \text{による})\\
&= 1 - f([e_1 \mid e_2], n) && (\text{fの定義による})\\
&= f(![e_1 \mid e_2], n) && (\text{fの定義による})\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$