『離散構造』 6章の例題

亀山

問 1 (集合の帰納的定義) $\{L, R, 0, 1, +\}$ 上の文字列を考える．ただし，L は左括弧 “(“ をあらわし，R は右括弧 “)” を表す．この文字列の集合 D を，以下のように帰納的に定義する．

(D1) $0 \in D$.

(D2) $1 \in D$.

(D3) $s \in D \Rightarrow LsR \in D$.

(D4) $s \in D \land t \in D \Rightarrow s + t \in D$.

(a) 文字列 $0+1+0$ が，集合 D の要素であることを示してみよう．まず，(D1) より $0 \in D$ である．また，(D2) より $1 \in D$ である．これらと，(D4) より，$0 + 1 \in D$ である．さらに，(D4) を使って，$0 + 1 + 0 \in D$ である．

(b) 文字列 $0 + 1 + 0$ が集合 D の要素であることを示す方法は，上記の手順以外にもある．それを示せ．(このように 2 通り以上の方法で同じ文字列が導出できるとき，曖昧な文法であるという．)

(c) 文字列 $LL1RR$ が，集合 D の要素であるかどうか，理由をつけて示せ．

(d) 文字列 $L0RR + LL1R$ が，集合 D の要素であるかどうか，理由をつけて示せ．

(e) この文法を曖昧でないものにする (D に属するどの文字列も，唯 1 つの方法で導けるようにする) には，D の定義をどう変更したらよいか？

問 2 (関数の帰納的定義) リストを反転する関数 `reverse`: $List_A \to List_A$ の定義を与えよ．たとえば，`reverse`$(\langle 1, 2, 3\rangle) = \langle 3, 2, 1\rangle$ となる．

問 3 (リストに関する帰納法) 任意のリスト x, y, z に対して，

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

が成立することを x に関する帰納法を用いて証明せよ．ただし，$\oplus$ はリストを連結する関数である．