

## 『離散構造』4章(関係)の演習問題

出題: 2015年11月13日

期限: 2015年11月20日の授業

$\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < n\}$  とする。 $\mathcal{N}_{12}$  上の2項関係  $R, S, T, U, V$  を以下のように定める。

$$xRy \Leftrightarrow x \bmod 3 \leq y \bmod 3$$

$$xSy \Leftrightarrow x \operatorname{div} 3 = y \operatorname{div} 3$$

$$xTy \Leftrightarrow xRy \wedge yRx$$

$$xUy \Leftrightarrow xSy \wedge xTy$$

$$xVy \Leftrightarrow 0 \leq y - x \leq 4$$

ただし、 $a \operatorname{div} b$  は  $a$  を  $b$  で割った値の小数点以下を切り捨てた自然数を表すものとする。

### 問題 1 (関係の性質)

- (a)  $R$  が反射的、対称的、推移的、反対称的、半順序、同値関係であるかをそれぞれ答えよ。反例がある場合はそれも示すこと。
- (b)  $S$  について同様のことを答えよ。
- (c)  $T$  について同様のことを答えよ。
- (d)  $U$  について同様のことを答えよ。
- (e)  $V$  について同様のことを答えよ。

### 問題 2 (関係の合成)

- (a)  $V \circ V$  を求めよ。
- (b)  $V \circ V \circ V$  を求めよ。
- (c)  $R \circ R$  を求めよ。

### 問題 3 (閉包)

- (a)  $\mathcal{N}_{12}$  上の2項関係で、 $V$  を包含し推移的である関係のうち、集合の要素数が最小のもの ( $V$  の推移閉包という) を求めよ。また、その関係が半順序関係であるかどうか答えよ。
- (b)  $\mathcal{N}_{12}$  上の2項関係で、 $S$  を包含し対称的である関係のうち、集合の要素数が最小のもの ( $S$  の対称閉包という) を求めよ。また、その関係が同値関係であるかどうか答えよ。