『離散構造』4 章 (関係) の演習問題 解答例 (海野)

$\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < n\}$ とする。$\mathcal{N}_{12}$ 上の 2 項関係 R, S, T, U, V を以下のように定める。

$$\begin{aligned}
xRy &\Leftrightarrow x \bmod 3 \leq y \bmod 3 \\
xSy &\Leftrightarrow x \text{ div } 3 = y \text{ div } 3 \\
xTy &\Leftrightarrow xRy \wedge yRx \\
xUy &\Leftrightarrow xSy \wedge xTy \\
xVy &\Leftrightarrow 0 \leq y - x \leq 4
\end{aligned}$$

ただし、a div b は a を b で割った値の小数点以下を切り捨てた自然数を表すものとする。

問題 1 (関係の性質)

(a) R が反射的、対称的、推移的、反対称的、半順序、同値関係であるかをそれぞれ答えよ。反例がある場合はそれも示すこと。

答. $x \bmod 3 \leq x \bmod 3$ なので R は反射的である。$0\ R\ 1$ だが $1\ R\ 0$ ではないので R は対称的でない。$x \bmod 3 \leq y \bmod 3$ かつ $y \bmod 3 \leq z \bmod 3$ ならば $x \bmod 3 \leq z \bmod 3$ なので R は推移的である。$0\ R\ 3$ かつ $3\ R\ 0$ だが $0 \neq 3$ なので R は反対称的でない。以上より、半順序でも同値関係でもない。

(b) S について同様のことを答えよ。

答. $x \text{ div } 3 = x \text{ div } 3$ なので S は反射的である。$x \text{ div } 3 = y \text{ div } 3$ ならば $y \text{ div } 3 = x \text{ div } 3$ なので S は対称的である。$x \text{ div } 3 = y \text{ div } 3$ かつ $y \text{ div } 3 = z \text{ div } 3$ ならば $x \text{ div } 3 = z \text{ div } 3$ なので S は推移的である。$0\ S\ 1$ かつ $1\ S\ 0$ だが $0 \neq 1$ なので S は反対称的でない。以上より、半順序ではないが同値関係である。

(c) T について同様のことを答えよ。

答. $xRx \wedge xRx$ なので T は反射的である。$xRy \wedge yRx$ ならば $yRx \wedge xRy$ なので T は対称的である。$xRy \wedge yRx$ かつ $yRz \wedge zRy$ ならば $xRz \wedge zRx$ なので T は推移的である。$0\ T\ 3$ かつ $3\ T\ 0$ だが $0 \neq 3$ なので T は反対称的でない。以上より、半順序ではないが同値関係である。

(d) U について同様のことを答えよ。

答. $xUy \Leftrightarrow x = y$ となる。したがって、U は反射的、対称的、推移的、反対称的である。以上より、半順序であり同値関係でもある。

(e) V について同様のことを答えよ。

答. $0 \leq x - x \leq 4$ なので V は反射的である。$0\ V\ 1$ だが $1\ V\ 0$ ではないので V は対称的でない。$0\ V\ 4$ かつ $4\ V\ 8$ だが $0\ V\ 8$ ではないので V は推移的でない。$0 \leq y - x \leq 4$ かつ $0 \leq x - y \leq 4$ ならば $x = y$ なので V は反対称的である。以上より、半順序でも同値関係でもない。

問題 2 (関係の合成)

(a) $V \circ V$ を求めよ。

答. $V \circ V$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} V \circ V &= \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{12} \times \mathcal{N}_{12} \mid \exists z(0 \leq z - x \leq 4 \land 0 \leq y - z \leq 4)\} \\ &= \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{12} \times \mathcal{N}_{12} \mid 0 \leq y - x \leq 8)\} \end{aligned}$$

(b) $V \circ V \circ V$ を求めよ。

答. $V \circ V \circ V$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} V \circ V \circ V &= \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{12} \times \mathcal{N}_{12} \mid \exists z(0 \leq z - x \leq 8 \land 0 \leq y - z \leq 4)\} \\ &= \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{12} \times \mathcal{N}_{12} \mid 0 \leq y - x \leq 12\} \end{aligned}$$

(c) $R \circ R$ を求めよ。

答. $R \circ R$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} R \circ R &= \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{12} \times \mathcal{N}_{12} \mid \exists z(x \bmod 3 \leq z \bmod 3 \land z \bmod 3 \leq y \bmod 3)\} \\ &= \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_{12} \times \mathcal{N}_{12} \mid x \bmod 3 \leq y \bmod 3\} \\ &= R \end{aligned}$$

問題 3 (閉包)

(a) $\mathcal{N}_{12}$ 上の 2 項関係で、V を包含し推移的である関係のうち、集合の要素数が最小のもの（V の推移閉包という）を求めよ。また、その関係が半順序関係であるかどうか答えよ。

答. V の推移閉包は $V \circ V \circ V$ であり、これは反射的・推移的・反対称的なので半順序関係である。

(b) $\mathcal{N}_{12}$ 上の 2 項関係で、S を包含し対称的である関係のうち、集合の要素数が最小のもの（S の対称閉包という）を求めよ。また、その関係が同値関係であるかどうか答えよ。

答. S はすでに対称的なので S の対称閉包は S であり、同値関係である。