『離散構造』 3 章演習問題 (亀山)

この問題では、$\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \le x < n\}$ とする。(つまり、$\mathcal{N}_n = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ である。$n \notin \mathcal{N}_n$ であることに注意せよ。)

問 1 (像、全射、単射、合成、逆関数)

$a \in \mathcal{N}_{19}$ に対して、2 つの関数 $f_a : \mathcal{N}_{19} \to \mathcal{N}_{19}$ と $g_a : \mathcal{N}_{19} \to \mathcal{N}_{19}$ を，$f_a(x) = (x+a) \mod 19$、$g_a(x) = (a \cdot x) \mod 19$ と定める．ただし， mod は，自然数上の割算の余りを求める演算とする。たとえば、$7 \mod 3 = 1$ である。

(a) $S = \{1, 3, 5\}$ とし、f_7 による S の像 $f_7(S)$ と、g_7 による $f_7(S)$ の像 $g_7(f_7(S))$ を計算しなさい。

(b) 前問にひき続き、合成関数 $g_7 \circ f_7$ による S の像と、合成関数 $f_7 \circ g_7$ による S の像を計算しなさい。前問と本問で計算した 4 つの像のうち一致するものがあるか？

(c) (難しい) 一般に、集合 $S \subset \mathcal{N}_{19}$ に対して、(1) g による「f による S の像」の像 (f による S の像を T とするとき、$g(T)$ と書けるもの) と、(2) 合成関数 $g \circ f$ による S の像の 2 つは一致するか？

(d) $a = 7$ のとき，f_a は全射か，また，単射か.

(e) $a = 7$ のとき，g_a は全射か，また，単射か.

(f) f_3 は全単射である。同様に、f_a が全単射になる $a \in \mathcal{N}_{19}$ を全て求めなさい。

(g) g_3 を n 回合成した関数を h_n とする。つまり、$h_0(x) = x$, $h_1(x) = g_3(x)$, $h_2(x) = g_3(g_3(x))$ 等である。$n \in \mathcal{N}_{19}$ に対して、h_n が恒等関数になる場合があるかこたえなさい。

(h) g_3 の逆関数は存在するが、それを f_a や g_b の形の関数の合成で書くことができるか、答えなさい。

(i) (難しい) 各 $a \in \mathcal{N}_{19}$ に対して、g_a の逆関数が存在するか、また、それが、f_a や g_b (および、必要ならば、それらの合成関数) で表すことができるか答えなさい。

問 2 (関数の性質)

(a) 「関数 $f : S \to T$ と $g : T \to U$ に対して，$g \circ f$ が単射であれば、f は単射である」は常に成立するか。常に成立するなら証明し、常には成立しないなら反例を与えよ。

(b) 「関数 $f : S \to T$ と $g : T \to U$ に対して，$g \circ f$ が単射であれば、g は単射である」は常に成立するか。常に成立するなら証明し、常には成立しないなら反例を与えよ。