

『離散構造』 3章 の例題

例題 1 (関数と部分関数の定義)

\mathcal{R} を実数の集合とする。次の対応は、 \mathcal{R} から \mathcal{R} への関数 (写像) であるか答えよ。関数でないものは、 \mathcal{R} から \mathcal{R} への部分関数であるか答えよ。

- $x \in \mathcal{R}$ に対して、 $xy = 0$ となる y を対応付ける対応関係。
- $x \in \mathcal{R}$ に対して、 $xy = 10$ となる y を対応付ける対応関係。
- $x \in \mathcal{R}$ に対して、 $(xy = 10) \vee (x = y = 0)$ となる y を対応付ける対応関係。

例題 2 (関数の像, 逆像, 合成)

$f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ および $g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ となる関数 f と g を $f(x) = x^2 + x - 1$, $g(x) = x^3 + 1$ で定義する。また、 $\mathcal{R}^+ = \{x \in \mathcal{R} \mid x \geq 0\}$ とする。

- f による \mathcal{R}^+ の像と、 \mathcal{R}^+ の逆像を求めよ。
- g による \mathcal{R}^+ の像と、 \mathcal{R}^+ の逆像を求めよ。
- 合成関数 $f \circ g$ と $g \circ f$ を求めよ。

例題 3 (全射, 単射, 逆関数, 合成)

集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ に対して、関数 $f: A \rightarrow A$ を $f(x) = (x + 3) \bmod 7$ で定義し、関数 $g: A \rightarrow A$ を $g(x) = (x * 3) \bmod 7$ で定義する。ただし、 \bmod は、整数同士の割り算による余りとする。(C 言語の % 演算子)。

- 関数 f は全射か、また、単射か。
- 関数 g は全射か、また、単射か。
- 関数 f と g の逆関数は存在するか、また、存在する場合、それはどういう関数か?
- 関数 f と g の 2通りの合成 $f \circ g$ と $g \circ f$ を求めよ。

例題 4 (関数に関する証明)

$f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ がいずれも単射であるとき、 $g \circ f$ も単射であることを示せ。