

『離散構造』 Short Quiz 略解

2015年11月13日(海野)

問題 1 自然数の集合 \mathcal{N} 上の 2 項関係 $xRy \Leftrightarrow \exists z(x < z \wedge z < y)$ が反射的、対称的、推移的、反対称的であるかどうかそれぞれ理由をつけて答えよ。

答. $0R0$ が成り立たないので反射的でない。 $0R2$ だが $2R0$ でないので対称的でない。 $\exists a(x < a \wedge a < y)$ かつ $\exists b(y < b \wedge b < z)$ ならば $\exists y(x < y \wedge y < z)$ なので推移的である。 $\exists z(x < z \wedge z < y)$ かつ $\exists z(y < z \wedge z < x)$ をみたく x, y は存在しないので反対称的である。

問題 2 集合 $A = \{\text{香川, 岡崎, 清武, 長友}\}$, $B = \{\text{ドルトムント, レスター, ハノーファー, インテル, ミラン}\}$, $C = \{\text{ドイツ, イタリア}\}$ について、 A, B 上の 2 項関係 $R \subset A \times B$ と B, C 上の 2 項関係 $S \subset B \times C$ を以下のように定める。

$$R = \{\langle \text{香川, ドルトムント} \rangle, \langle \text{岡崎, レスター} \rangle, \langle \text{清武, ハノーファー} \rangle, \langle \text{長友, インテル} \rangle\}$$

$$S = \{\langle \text{ドルトムント, ドイツ} \rangle, \langle \text{ハノーファー, ドイツ} \rangle, \langle \text{インテル, イタリア} \rangle, \langle \text{ミラン, イタリア} \rangle\}$$

関係 $R \circ S \subset A \times C$ を求めよ。

$$\text{答. } R \circ S = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z(xRz \wedge zSy)\} = \{\langle \text{香川, ドイツ} \rangle, \langle \text{清武, ドイツ} \rangle, \langle \text{長友, イタリア} \rangle\}$$