『離散構造』演習問題 (亀山)

以下の演習問題に対して、演習実施日までに解答 (A4 サイズ用紙、氏名・学籍番号明記) を用意せよ。

問題 1 (論理の続き)

(a) M という 3 引数の論理記号は、多数決をあらわすと思ってほしい。すなわち、$M(x, y, z)$ の真理値は x, y, z のうちの 2 つ以上の真理値に一致する。たとえば、$M(true, false, true)$ は $true$ である。このとき、$M(A, B, C)$ と同値な論理式を、$\neg$, $\wedge$, $\vee$ と A, B, C (および、括弧) だけから構成せよ。

(b) 余力がある人は、$\wedge, \vee, A, B, C$ のみで、$M(A, B, C)$ と同値な論理式を作れるか答えなさい。

問題 2 (集合の記述)

以下の集合を $\{x \in S \mid A\}$ の形 (S は集合，A は x に関する論理式) で記述せよ.

(a) 整数を係数とする二次方程式の根 (解) になる実数すべてからなる集合 S_1.

(b) 自然数からなる集合のうち、その最大値と最小値の差が 10 以下であるような集合を、すべて集めてできた集合 S_2. たとえば、$\{1, 5, 10\} \in S_2$ であり、$\{5, 10, 20\} \notin S_2$ である。

問題 3 (集合の演算)

以下の各項目では、いくつかの集合がならべられている。それらのうち、どんな S, T, V に対しても等しい組があるか考えよう。

(1) まず、具体的な集合で考えてみよう。S, T, V が以下の集合であるとき、下記の集合たちが等しいかどうか判定せよ。$S = \{1, 3, 5, 7\}$, $T = \{2, 3, 6, 7\}$, $V = \{4, 5, 6, 7\}$。

(2) 前問で等しい組合せについては、どんな S, T, V に対しても等しいかどうか答えなさい。必ずしも等しくないのであれば、具体的な反例をあげなさい。(なお、余力がある人は、いつでも等しい組合せについて、そのことを証明しなさい。)

(a) 集合 $(S \cup T) - T$ と集合 S と集合 $S - T$.

(b) 集合 $(S \cap T) - T$ と集合 S と集合 $S - T$.

(c) 集合 $(S \cup T) \times V$ と集合 $(S \times V) \cup (T \times V)$.

問題 4 (有限集合の要素数)

S が有限集合のとき、$\#S$ は S の要素数をあらわす。(S の要素数を $|S|$ と書くこともある。)

(a) 集合 S, T に対して $\#(S \cup T) = \#S + \#T - \#(S \cap T)$ である理由を言葉で簡単に述べなさい。

(b) 集合 S, T に対して $\#(S - T) = \#S - \#(S \cap T)$ である理由を言葉で簡単に述べなさい。

(c) 集合 S に対して $\#(2^S) = 2^{\#(S)}$ である理由を言葉で簡単に述べなさい。

(d) 上記を使って、$\#((S \cup T) - V)$ を、$\#S$, $\#T$, $\#(S \cap T)$, $\#(S \cap V)$, $\#(T \cap V)$, $\#(S \cap T \cap V)$ で表しなさい。

(e) 「1 以上 10000 以下の自然数で、13 の倍数であるか 17 の倍数であるが、ただし、19 の倍数でないもの」の個数を計算しなさい.

問題 5 (証明)

以下の論理式がどんな S, T に対しても成立するか答えなさい。(成立するなら証明し、成立しないなら反例をあげなさい。)

$(2^S \subset 2^T) \Rightarrow (S \subset T)$. ($S$ のべき集合が、T のべき集合の部分集合なら、S は T の部分集合である。)