『離散構造』演習問題 (亀山)

問題 1 (論理の続き)

(a) M という 3 引数の論理記号は、多数決をあらわすと思ってほしい。すなわち、$M(x,y,z)$ の真理値は x,y,z のうちの 2 つ以上の真理値に一致する。たとえば、$M(true, false, true)$ は $true$ である。このとき、$M(A,B,C)$ と同値な論理式を、$\neg$, $\wedge$, $\vee$ と A,B,C (および、括弧) だけから構成せよ。

解答例: 「A と B が真、C が偽」をあらわす論理式は $A \wedge B \wedge \neg C$ である。そこで、「A,B,C のうち 2 個または 3 個が真である」ことを意味する論理式は、

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$$

である。これが解答の一例である。

なお、上記の論理式はもう少し短い論理式で表現することができるが、これは次の問題 (b) の解でもあるので、そちらで解説する。

(b) 余力がある人は、$\wedge, \vee, A, B, C$ のみで、$M(A,B,C)$ と同値な論理式を作れるか答えなさい。

解答例: 今度は $\neg$ をつかわないで、前問と同値な論理式な表したい。これは、「よく考えるとわかってくる」としか言いようがないが、前問で否定の論理式を全部とりはらった論理式：

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

が解のひとつである。ここで、$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B)$ の部分は、$A \wedge B$ と同値なので、さらに簡単化でき、

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

という論理式が得られる。おそらくこれが $M(A,B,C)$ をあらわすもっとも小さい論理式であろう。

問題 2 (集合の記述)

以下の集合を $\{x \in S \mid A\}$ の形 (S は集合，A は x に関する論理式) で記述せよ．

(a) 整数を係数とする二次方程式の根 (解) になる実数すべてからなる集合 S_1.

解答例: 「x が整数を係数とする二次方程式の根である」というのは $ax^2 + bx + c = 0$ とあらわせそうである。ただし、$a,b,c \in \mathcal{Z}$ とする。

もう少し精密に考えると $x \in S_1$ となる x について考えると、「すべての $a,b,c \in \mathcal{Z}$ に対して、$ax^2+bx+c = 0$ を満たす x」ではなく、「ある $a,b,c \in \mathcal{Z}$ に対して、$ax^2 + bx + c = 0$ を満たす x」であることがわかる。

そこで、問題の集合は、以下のように書ける。

$$S_1 = \{x \in \mathcal{R} \mid \exists a,b,c \in \mathcal{Z}.\ ax^2 + bx + c = 0\}$$

なお、このような二次方程式の根は実数とは限らないが、上記の S_1 の定義は、左の方に $x \in \mathcal{R}$ と書いてあるので、実数に限定される。

[補足] 演習において「二次方程式というからには、$a \neq 0$ という条件もいるのではないか」という指摘があった。もっともな指摘なので、問題文の自然な定式化としては、それを含めて考えてほしい。つまり、$S_1 = \{x \in \mathcal{R} \mid \exists a,b,c \in \mathcal{Z}.\ a \neq 0 \wedge ax^2 + bx + c = 0\}$ となる。

実は「整数係数の一次方程式の根になる実数」はすべて「整数係数の二次方程式の根になる実数」になるので、$a \neq 0$ をいれてもいれなくても、結果として同じ集合をあらわす。つまり、[補足] のように修正しなくても、正解にはなる。

(b) 自然数からなる集合のうち、その最大値と最小値の差が 10 以下であるような集合を、すべて集めてできた集合 S_2. たとえば、$\{1,5,10\} \in S_2$ であり、$\{5,10,20\} \notin S_2$ である。

解答例: この問題もいろいろな答えがある。一番素直に解くのは、「自然数からなる集合の最大値」と「自然数からなる集合の最小値」をあらわし、それれの差が 10 以下であることを記述する方法である。しかし、「x が集合 T の最大値である」ことをあらわすのは結構大変である。その形で与えた解は後に示すことにして、ここでは、もうちょっと賢い方法を考えよう。

「集合 T の最大値と最小値の差が 10 以下」というのは、いいかえると、「集合 T のどんな要素 x, y に対してもその差が 10 以下」ということである。これは、$\forall x, y \in T.\ |x-y| \leq 10$ と簡単に書ける。そこで、これを使って以下のように S_2 を定義できる。

$$S_2 = \{T \in 2^{\mathcal{N}} \mid \forall x, y \in T.\ |x-y| \leq 10\}$$

S_2 は集合の集合であり、その要素 T は $\mathcal{N}$ の部分集合である。すなわち、T は $2^{\mathcal{N}}$ の要素である。また、T は「最大値と最小値の差が 10 以下」を満たすので、上記のような定義となった。

補足 1: なお、上記の定義をすると、S_2 は空集合を要素とする。つまり、$T = \{\ \}$ であれば、$\forall x, y \in T.\ |x-y| \leq 10$ が満たされてしまう。問題文を読むと「最大値と最小値」に言及しているので、空集合は問題文の条件を満たしてないと考えた方がよいかもしれない (そこが、日本語を含む自然言語のあいまいなところであり、「T に最大値は当然存在する」という調子で書いてある。) もし、そういう風に考える場合は、上記の S_2 の定義を、

$$S_2' = \{T \in 2^{\mathcal{N}} \mid (T \neq \{\}) \wedge (\forall x, y \in T.\ |x-y| \leq 10)\}$$

とすればよい。

補足 2: 問題文に忠実に、「最大値」と「最小値」を定式化してみよう。

まず、「$x \in T$ が T の最大値である」というのは、

$$\forall z \in T.\ z \leq x$$

と記述できる。そこで、問題文を「x, y がそれぞれ T の最大値、最小値ならば、$x - y \leq 10$ である」という風に定式化しよう。以下が答えである。

$$S_2 = \{T \in 2^{\mathcal{N}} \mid \forall x, y \in T.\ ((\forall z \in T.\ z \leq x) \wedge (\forall z \in T.\ y \leq z)) \Rightarrow x - y \leq 10\}$$

なんともすごい論理式である。これは、もう少し簡単にして、以下のようにも書ける。

$$S_2 = \{T \in 2^{\mathcal{N}} \mid \forall x, y \in T.\ (\forall z \in T.\ z \leq x \wedge y \leq z) \Rightarrow x - y \leq 10\}$$

問題 3 (集合の演算)

以下の各項目では、いくつかの集合がならべられている。それらのうち、どんな S, T, V に対しても等しい組があるか考えよう。

(1) まず、具体的な集合で考えてみよう。S, T, V が以下の集合であるとき、下記の集合たちが等しいかどうか判定せよ。$S = \{1,3,5,7\}$, $T = \{2,3,6,7\}$, $V = \{4,5,6,7\}$。

(a) 集合 $(S \cup T) - T$ と集合 S と集合 $S - T$.

解答例: $(S \cup T) - T = \{1,2,3,5,6,7\} - \{2,3,6,7\} = \{1,5\}$. $S - T = \{1,3,5,7\} - \{2,3,6,7\} = \{1,5\}$. となり、この例では、$(S \cup T) - T = S - T$ となった。

(b) 集合 $(S \cap T) - T$ と集合 S と集合 $S - T$.

解答例: $(S \cap T) - T = \{\}$. $S = \{1, 3, 5, 7\}$. $S - T = \{1, 5\}$. となり、この 3 つの集合は一致しない。

(c) 集合 $(S \cup T) \times V$ と集合 $(S \times V) \cup (T \times V)$.

解答例: 計算してみると、この 2 つの集合はいずれも以下のものになる。

$$
\begin{aligned}
\{&\langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 1,6\rangle, \langle 1,7\rangle, \\
&\langle 2,4\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 2,7\rangle, \\
&\langle 3,4\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 3,7\rangle, \\
&\langle 5,4\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,6\rangle, \langle 5,7\rangle, \\
&\langle 6,4\rangle, \langle 6,5\rangle, \langle 6,6\rangle, \langle 6,7\rangle, \\
&\langle 7,4\rangle, \langle 7,5\rangle, \langle 7,6\rangle, \langle 7,7\rangle\}
\end{aligned}
$$

(2) 前問で等しい組合せについては、どんな S, T, V に対しても等しいかどうか答えなさい。必ずしも等しくないのであれば、具体的な反例をあげなさい。(なお、余力がある人は、いつでも等しい組合せについて、そのことを証明しなさい。)

解答例: 前問で等しくないものは、それがそのまま反例となる。また、この問題の場合、前問の例で等しいものは、そのまま一般的にも等しくなる。

等しくなるケースは、$(S \cup T) - T = S - T$ および $(S \cup T) \times V = (S \times V) \cup (T \times V)$ の 2 つである。これらが本当に等しいことを数学的に示すのは、証明が必要となり、相当長くなるので (しかも、本問ではそれは要求されていないので) 省略する。

問題 4 (有限集合の要素数)

S が有限集合のとき、$\#S$ は S の要素数をあらわす。(S の要素数を $|S|$ と書くこともある。)

(a) 集合 S, T に対して $\#(S \cup T) = \#S + \#T - \#(S \cap T)$ である理由を言葉で簡単に述べなさい。

解答例: 集合 $S \cup T$ は、互いに共通部分をもたない 3 つの集合、$S - T$, $T - S$, $S \cap T$ に分割できる。すなわち、$\#(S \cup T) = \#(S - T) + \#(T - S) + \#(S \cap T)$ である。よって、$\#(S \cup T) = (\#(S - T) + \#(S \cap T)) + (\#(T - S) + \#(S \cap T)) - \#(S \cap T) = \#S + \#T - \#(S \cap T)$ である。

(b) 集合 S, T に対して $\#(S - T) = \#S - \#(S \cap T)$ である理由を言葉で簡単に述べなさい。

解答例: $S - T = S - (S \cap T)$ である。また、$S \cap T \subset S$ であるので、$\#(S - T) = \#S - \#(S \cap T)$ となる。

(c) 集合 S に対して $\#(2^S) = 2^{\#(S)}$ である理由を言葉で簡単に述べなさい。

解答例: $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ (各 a_i は互いに異なる) とする。

S の部分集合 T は n 桁の 2 進数に対応付く。(ただし、ここでは、00101 のように先頭に 0 があるものも「5 桁の 2 進数」と見なしている。) この対応付けを具体的に書くと、$a_i \in T$ であれば、この 2 進数の i けた目を 1 とし、$a_i \notin T$ であれば、この 2 進数の i けた目を 0 として作る。たとえば、$n = 3$ とすると、$\{a_1, a_3\}$ に対応付く 2 進数は、101 であり、$\{a_2, a_3\}$ に対応付く 2 進数は、011 である。

この対応付けにより、S のすべての部分集合 T は 相異なる n 桁の 2 進数で表現でき、逆に、n 桁の 2 進数は、S の相異なる部分集合で表現できる。よって、$\#(2^S)$ は、n 桁の 2 進数 (先頭に 0 があるものも含む) の個数と同じであり、後者は、2^n 個である。

(d) 上記を使って、$\#((S \cup T) - V)$ を、$\#S$, $\#T$, $\#(S \cap T)$, $\#(S \cap V)$, $\#(T \cap V)$, $\#(S \cap T \cap V)$ で表しなさい。

解答例: いろいろなやりかたがあるが、ここでは問題の指示に忠実に、前問までに得られた等式のみをつかって変形することにする。

$$
\begin{aligned}
\#((S \cup T) - V) &= \#(S \cup T) - \#((S \cup T) \cap V) \\
&= (\#S + \#T - \#(S \cap T)) - \#((S \cap V) \cup (T \cap V))
\end{aligned}
$$

ここで、$\#((S \cap V) \cup (T \cap V))$ を計算すると、

$$
\begin{aligned}
\#((S \cap V) \cup (T \cap V)) &= \#(S \cap V) + \#(T \cap V) - \#((S \cap V) \cap (T \cap V)) \\
&= \#(S \cap V) + \#(T \cap V) - \#(S \cap T \cap V)
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
\#((S \cup T) - V) &= (\#S + \#T - \#(S \cap T)) - (\#(S \cap V) + \#(T \cap V) - \#(S \cap T \cap V)) \\
&= \#S + \#T - \#(S \cap T) - \#(S \cap V) - \#(T \cap V) + \#(S \cap T \cap V)
\end{aligned}
$$

(e) 「1 以上 10000 以下の自然数で、13 の倍数であるか 17 の倍数であるが、ただし、19 の倍数でないもの」の個数を計算しなさい.

解答例: S を「1 以上 10000 以下の自然数で、13 の倍数であるものの集合」、T を「1 以上 10000 以下の自然数で、17 の倍数であるものの集合」、V を「1 以上 10000 以下の自然数で、19 の倍数であるものの集合」とする。

$\#((S \cup T) - V)$ が求めたいものである。前問の結果より、これは、$\#S + \#T - \#(S \cap T) - \#(S \cap V) - \#(T \cap V) + \#(S \cap T \cap V)$ と等しい。そこで、それぞれを求めると、

$$
\begin{aligned}
\#S &= 10000/13 = 769 \\
\#T &= 10000/17 = 588 \\
\#(S \cap T) &= 10000/13/17 = 45 \\
\#(S \cap V) &= 10000/13/19 = 40 \\
\#(T \cap V) &= 10000/17/19 = 30 \\
\#(S \cap T \cap V) &= 10000/13/17/19 = 2
\end{aligned}
$$

となり、

$$\#((S \cup T) - V) = \#S + \#T - \#(S \cap T) - \#(S \cap V) - \#(T \cap V) + \#(S \cap T \cap V) = 769 + 588 - 45 - 40 - 30 + 2 = 1244$$

問題 5 (証明)

以下の論理式がどんな S, T に対しても成立するか答えなさい。(成立するなら証明し、成立しないなら反例をあげなさい。)

$(2^S \subset 2^T) \Rightarrow (S \subset T)$. ($S$ のべき集合が、T のべき集合の部分集合なら、S は T の部分集合である。)

解答例: 成立するので証明する。

$2^S \subset 2^T$ を仮定する。

べき集合の定義から、$S \in 2^S$ である。これと、仮定から、$S \in 2^T$ となる。再び、べき集合の定義より、$S \subset T$ となる。

よって、仮定なしに $(2^S \subset 2^T) \Rightarrow (S \subset T)$ が導けた。