

『離散構造』 2章 の例題の解答

例題 1 (集合の表現)

以下の集合を $\{x \in A \mid P(x)\}$ の形で記述せよ。

- (a) うるう年 (4 で割り切れ、100 で割り切れないか、または、400 で割り切れる年) の集合

「a が b を割り切る (b が a で割り切れる)」を $a|b$ と表し、自然数の集合を \mathcal{N} と書けば、問題の集合は、以下の通り。

$$\{x \in \mathcal{N} \mid (4|x) \wedge ((\neg(100|x)) \vee (400|x))\}$$

- (b) 素数の集合

x が素数であるとは、 x の (正の) 約数が 1 と x しかないものを言う。そこで、「 $\bigcirc\bigcirc$ を満たすものは Δ しかない」ことを表現する必要がでてくるが、これは、「 y が $\bigcirc\bigcirc$ を満たすならば、 $y=\Delta$ である」と書けばよい。よって、素数の集合は以下のように表現できる。

$$\{x \in \mathcal{N} \mid \forall y \in \mathcal{N}. ((y|x) \Rightarrow (y = 1 \vee y = x))\}$$

ちなみに、 $\{x \in \mathcal{N} \mid ((y|x) \Rightarrow (y = 1 \vee y = x))\}$ と書いてしまうと、 $\{x \in \mathcal{N} \mid \exists y. ((y|x) \Rightarrow (y = 1 \vee y = x))\}$ の意味になるので、まったく違う集合になってしまう。

- (c) 3桁の自然数で、それぞれの桁の数字が異なるものを集めた集合 (例: 123 はこの集合に属し、122 は属さない。)

これはいろいろな表現方法がある。一番短く表現するより、正確に表現することを目指す、以下のようなになる。

$$\{x \in \mathcal{N} \mid x = 100a + 10b + c \wedge (1 \leq a \leq 9) \wedge (0 \leq b \leq 9) \wedge (0 \leq c \leq 9) \wedge (a \neq b) \wedge (b \neq c) \wedge (c \neq a)\}$$

これは、 x の 3 つの桁を、高い方から順番に a, b, c と書いたものである。

なお、上記の縦棒の右の命題は「 \circ 。となる a, b, c が存在する」という意味であり、従って、以下の表現でもよい。

$$\{x \in \mathcal{N} \mid \exists a \in \mathcal{N}. \exists b \in \mathcal{N}. \exists c \in \mathcal{N}. x = 100a + 10b + c \wedge \dots\}$$

- (d) 自然数の集合で 3 を含むもの (たとえば、奇数の集合や素数の集合) をすべて集めた集合

定義したい集合は、集合の集合であり、その要素となる集合 (の 1 つ) を S と書くと、 $3 \in S$ を満たさなければいけない。よって、以下のように定義できる。

$$\{S \in 2^{\mathcal{N}} \mid 3 \in S\}$$

もちろん、以下のように書いても同じことであるが、本問では、「 $\{x \in A \mid P(x)\}$ の形で記述せよ」という指定があるので、以下の形で答えてはいけない。

$$\{S \subset \mathcal{N} \mid 3 \in S\}$$

例題 2 (集合の演算)

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{1, 3, 4\}$ とするとき、以下の等式の左右両辺を計算して、等式が成立するかどうか答えよ。

- (a) $A \cup (B \cap C) = A \cap (B \cup C)$: 左辺= $\{1, 2, 3, 4\}$, 右辺= $\{1, 2, 3\}$ となって等式は成立しない。
- (b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$: 左辺= $\{1, 3, 4\}$, 右辺= $\{1, 3, 4\}$ となって等式は成立する。(実際この等式は、どんな A, B, C に対しても成立することが証明できる。)
- (c) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$: 左辺= $\{2\}$, 右辺= $\{2\}$ となって等式は成立する。(実際この等式は、どんな A, B, C に対しても成立することが証明できる。)
- (d) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$: 左辺= $\{2\}$, 右辺= $\{2\}$ となって等式は成立する。(実際この等式は、どんな A, B, C に対しても成立することが証明できる。)
- (e) $2^{\{\}} = \{\}$: 左辺= $\{\{\}\}$, 右辺= $\{\}$ となって等式は成立しない。

これは間違いやすいところだが、 $2^{\{\}}$ は要素数が $2^0 = 1$ の集合であり、空集合ではない。

例題 3 (集合に関する推論)

集合 A, B, C に対して以下の等式が成立するか考え、証明または反証せよ。

- (a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

成立するので証明する。

(左辺 \subset 右辺 の証明) $x \in (A \cap B) \cup C$ と仮定する。 \cup の定義より、 $x \in A \cap B$ または $x \in C$ である。この 2 つの Case に場合分けして証明する。

(Case-1: $x \in A \cap B$ のとき) \cap の定義より、 $x \in A$ かつ $x \in B$ である。これらと \cup の定義より、 $x \in A \cup C$ かつ $x \in B \cup C$ である。さらに \cap の定義より、 $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ である。

(Case-2: $x \in C$ のとき) \cup の定義より、 $x \in A \cup C$ かつ $x \in B \cup C$ がいえるので、上記と同様に、 $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ である。

これで、(左辺 \subset 右辺) が言えた。

(右辺 \subset 左辺 の証明) $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ と仮定する。

\cap の定義より、 $x \in A \cup C$ かつ $x \in B \cup C$ である。 \cup の定義より、 $x \in A$ または $x \in C$ がいえる。それらと独立に、 $x \in B$ または $x \in C$ がいえる。これらをまとめると、4 つの Case がある。

(Case-1: $x \in A$ かつ $x \in B$ のとき) $x \in A \cap B$ であるので、 $x \in (A \cap B) \cup C$ が言える。

(Case-2: $x \in A$ かつ $x \in C$ のとき) $x \in C$ なので、 $x \in (A \cap B) \cup C$ が言える。

(Case-3: $x \in C$ かつ $x \in B$ のとき) $x \in C$ なので、 $x \in (A \cap B) \cup C$ が言える。

(Case-4: $x \in C$ かつ $x \in C$ のとき) $x \in C$ なので、 $x \in (A \cap B) \cup C$ が言える。

上記の 4 つの Case いずれでも、(右辺 \subset 左辺) が言えた。

上記より、左右両辺が、集合として等しいことが証明できた。(証明終わり)

補足: 後半の証明で 4 つの Case に分けたが、これは、解説のために丁寧に書いたためであり、実際には、「 $x \in A$ かつ $x \in B$ 」という Case と、「 $x \in C$ 」という Case の 2 つに分ければ十分である。

(b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

\Leftrightarrow の形の命題なので、 $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ と $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$ の両方を言う必要がある。

($A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ の証明) $A \subset B$ と仮定する。 $A \cup B = B$ を言いたいのだが、 $B \subset A \cup B$ は簡単に言えるので、 $A \cup B \subset B$ だけを示すことにする。

このため、 $x \in A \cup B$ と仮定する。 $x \in A$ または $x \in B$ である。 $x \in A$ のとき $A \subset B$ と仮定しているので、 $x \in B$ である。よって、いずれにしても $x \in B$ である。以上より、 $A \cup B \subset B$ が言えた。

($A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$ の証明)

$A \cup B = B$ と仮定する。 $A \subset B$ を言いたいので、 $x \in A$ と仮定する。

$x \in A$ と $A \subset B$ から $x \in B$ が言える。 $x \in A$ を仮定して、 $x \in B$ が言えたので、 $A \subset B$ である。(証明終わり)

(c) $A = B \Rightarrow A - C = B - C$.

$A = B$ と仮定する。 $A - C = B - C$ を証明するためには、 $A - C \subset B - C$ と $B - C \subset A - C$ を言えばよい。

($A - C \subset B - C$ の証明) $x \in A - C$ と仮定する。(目標は $x \in B - C$ を示すことである。) 差集合の定義より、 $x \in A$ かつ $x \notin C$ である。 $A = B$ なので $x \in B$ である。よって、 $x \in B - C$ である。

($B - C \subset A - C$ の証明) 上記と同様。

以上から、 $A = B$ を仮定して $A - C = B - C$ が言えたので、 $A = B \Rightarrow A - C = B - C$ が言えた。(証明終わり)

例題 4 (集合の要素の数)

集合 A に対して、その要素数を $\#A$ と表示する。(なお、集合の要素数のことを、濃度 (cardinality) と呼ぶ。) 以下の論理式がすべての有限集合 A, B に対して成立するかどうか考えなさい。

(a) $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.

成立しない。反例: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ とすると、左辺は 3 で、右辺は 4 となる。

補足: 授業でも何度か言ったことだが、「すべての。。。に対して成立する」ことの反証は、「。。。を満たさない具体例を 1 つ示せばよい。これを反例 (counterexample) と言う。一方、「。。。とは限らない」や「。。。は証明できない」ということを言うだけでは、「。。。でない」ことの証明とは言えない。

(b) $\#(A - B) = \#A - \#(A \cap B)$.

成立する。

このことを以下のようにして示す。

まず、非常に簡単にわかることとして、 $X = Y \cup Z$ で、かつ、 $Y \cap Z = \{\}$ のとき、 $\#X = \#Y + \#Z$ である。

この式で、 $X = A$, $Y = A - B$, $Z = A \cap B$ と置くと、 $\#A = \#(A - B) + \#(A \cap B)$ となり、問題文の等式が導かれる。

。。。が、これが導かれるためには、 $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ と、 $(A - B) \cap (A \cap B) = \{\}$ の 2 つが言えなければいけない。(そこを飛ばしてしまうと、証明にならない。)

1. $A = (A - B) \cup (A \cap B)$: これは、前問と同様にして証明できる。(証明は長くなるので、ここでは省略)

2. $(A - B) \cap (A \cap B) = \{\}$: これを証明するには、 $x \in (A - B) \cap (A \cap B)$ と仮定して矛盾する (そのような x は存在しない) を言えばよい。

$x \in A - B$ かつ $x \in A \cap B$ である。前者から、 $x \in A$ かつ $x \notin B$ である。後者から、 $x \in A$ かつ $x \in B$ である。これらは矛盾するので、このような x はない。つまり、 $(A - B) \cap (A \cap B) = \{\}$ である。

以上で証明終わり。

(c) $\#(A \times B) = \#A \times \#B$.

成立する。

左辺の要素は、 $\langle a, b \rangle$ の形であり、 $a \in A$ かつ $b \in B$ である。 a, b の選択は独立であるので、 $\#A$ と $\#B$ の積の個数だけの要素がある。