『離散構造』 Short Quiz (解答例つき)
(亀山)

Quiz 1. 論理式 $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$ は恒真であるか、また、充足可能であるか？その理由を言葉で説明しなさい。(言葉でなく、真理値表を使って答えてもよい。)

Answer.

まず、「充足可能」(satisfiable) という言葉を、授業で説明しなかったので、後半部分は解答不能であった。この点をお詫びしたい。「恒真」とともに、定義しておこう。

- 命題論理の論理式 (命題) A が、恒真 (valid) であるとは、A がどのような真理値割り当てのもとでも「真」という値を取ることをである。(「真理値割り当て」というのは、原子論理式に対して「真」または「偽」を割り当てたもののことであり、真理値表の 1 行 (横の 1 行) に相当する。真理値表のすべての行において、命題 A が「真」の値をとるというとき、つまり、真理値表で、A の列 (縦の 1 列) で、「真」だけがあるとき、A は恒真であると言う。)

- 命題論理の論理式 (命題) A が、充足可能 (satisfiable) であるとは、A が、ある真理値割り当てのもとで「真」という値を取ることをである。(1 つ以上の真理値割り当てで「真」になればよい。もちろん、すべての真理値割り当てで「真」となってもよい。つまり、恒真な命題は、充足可能である。)

- 命題 A が、充足不能 (unsatisfiable) であるとは、A が、すべての真理値割り当てのもとで「偽」という値を取ることである。(このことを、「恒偽」であるとも言う。)

簡単にわかる事実: 「充足可能でない」ことと「充足不能である」ことは一致する。また、「A が恒真」と「$\neg A$ が充足不能」は一致する。

さて、解答であるが、論理式 $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$ は真理値表を書くとわかるように恒真である。

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

インフォーマルな理由の説明の例: 本問は、真理値表をきちんと書きなさい、ということではなく、インフォーマルに理由を述べればよいという問題設定だったので、いろいろな理由説明があり得る。たとえば、「$P \Rightarrow Q$ は $(\neg P) \vee Q$ と同値であり、そうすると、元の論理式は $(\neg P) \vee Q \vee (\neg Q) \vee P$ と同値であるが、これは $P \vee (\neg P) \vee X$ の形なので、明らかに恒真である。」というものである。ただし、ここでの推論は、「$P \Rightarrow Q$ は $(\neg P) \vee Q$ と同値である」などの事実に依存しており、それらの根拠を聞かれたら、結局、真理値表を書く等のことをしなければいけない。

真理値表を書く以外に、数学的に厳密な方法は、「命題論理の推論体系」を使って、$(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$ の「証明」を書くことである。これは、2 年生の「論理と形式化」で習うであろう。

Quiz 2. 論理式 $A \Leftrightarrow B$ と同値な論理式で、A, B, $\neg$, $\vee$ (および、かっこ) だけからなるものを 1 つ書きなさい。なお、$\Rightarrow$, $\wedge$ は使ってはいけない。

Answer. この問題は、命題論理を習ったばかりの人には難しいとおもうので、現段階では解けなくても問題ない。2 つの論理式の組のうち、「これとこれが同値」という組み合わせが頭にはいっていないと、なかなか大変だからである。しかし、そのような同値性も、いずれは、頭にいれておいてほしい、という意味で、あえて、short quiz として出してみた。

いま解けなくても、解答はしっかり読んでおいてほしい。

まず、「同値な論理式の組」として有名な (有用な) ものを列挙しよう。(これらが本当に同値かどうかを確かめるには、真理値表を書けばよい。)

- 交換則: 「$A \wedge B$ と $B \wedge A$」、「$A \vee B$ と $B \vee A$」
- 結合則: 「$(A \wedge B) \wedge C$ と $A \wedge (B \wedge C)$」、「$(A \vee B) \vee C$ と $A \vee (B \vee C)$」、
- 吸収則: 「$A \wedge A$ と A」、「$A \vee A$ と A」

  なお、「$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ と $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$」や、「$A \Rightarrow B$ と $B \Rightarrow A$」は同値でないので注意せよ。
- de Morgan の法則: 「$\neg(A \wedge B)$ と $(\neg A) \vee (\neg B)$」、「$\neg(A \vee B)$ と $(\neg A) \wedge (\neg B)$」
- 二重否定の除去: 「$\neg(\neg A)$ と A」
- 分配則: 「$A \wedge (B \vee C)$ と $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$」、「$A \vee (B \wedge C)$ と $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$」
- 論理記号を別の論理記号で表す: 「$A \Rightarrow B$ と $(\neg A) \vee B$」、「$A \Leftrightarrow B$ と $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$」

問題の解答にもどると、当てずっぽうで変形してみて、あとで、それが $A \Leftrightarrow B$ と同値であることを示す、というのでも問題ない。

系統的に答えを得るための一番素直なやりかたは、以下のように順番に変形することであろう。

- $A \Leftrightarrow B$ は $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ と同値であるので、これに置きかえる。
- $X \wedge Y$ は $\neg(\neg(X \wedge Y))$ と同値であり、さらに、これは de Morgan の法則から、$\neg((\neg X) \vee (\neg Y))$ と同値である。

  よって、上記の式は、$\neg((\neg(A \Rightarrow B)) \vee (\neg(B \Rightarrow A)))$ と同値であるので、これに置きかえる。
- $X \Rightarrow Y$ は $(\neg X) \vee Y$ と同値であるので、上記の式は、$\neg((\neg((\neg A) \vee B)) \vee (\neg((\neg B) \vee A)))$ と同値である。これは、$\neg$, $\vee$, A, B のみを使った論理式であるので、求めるもの (の 1 つ) である。

答え: $\neg((\neg((\neg A) \vee B)) \vee (\neg((\neg B) \vee A)))$ (これ以外にも答は、無限にたくさん存在する。興味がある人は、「一番サイズが小さな答」が何であるか、考えてみるとよい。)