『離散構造』１章の演習問題の解答例 (亀山)

問 1 次の日本語の文を命題論理の論理式として表現しなさい。

(a) 「うちの猫は、えさをやるか、散歩に連れていってやると、機嫌がよい。」

(原子命題：P=「うちの猫にえさをやる」、Q=「うちの猫を散歩に連れていく」、R=「うちの猫は機嫌が良い」)

解答. $(P \vee Q) \Rightarrow R.$

(b) 「うちの猫は、えさをやったら機嫌がよいし、散歩に連れていってやったら機嫌がよい。」

解答例. $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R).$

(c) 「スコットランドが残り試合に全勝したとすると、日本が決勝トーナメントに行くには、日本が残り 2 試合に全勝し、かつ、南アフリカがボーナスポイントを取らないことが必要である。」

(原子命題: S=「スコットランドが残り試合に全勝する」、T=「日本が決勝トーナメントに行く」、J=「日本が残り 2 試合に全勝する」、B=「南アフリカがボーナスポイントを取る」)

解答例. $S \Rightarrow (T \Rightarrow (J \wedge (\neg B))).$

このほかの形式化も可能である。たとえば、$(S \wedge T) \Rightarrow (J \wedge (\neg B))).$

(d) 「スコットランドが残り試合に全勝したとすると、日本が決勝トーナメントに行くには、日本が残り試合に全勝し、かつ、南アフリカがボーナスポイントを取らないことが十分である。」

解答例. $S \Rightarrow ((J \wedge (\neg B)) \Rightarrow T).$

これも別解がいろいろ存在する。

問 2 前問の 1 問目の答えと、2 問目の答えが同値であるか、真理値表をつかって調べなさい。

解答例. 真理値表は以下の通り。

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

真理値表の 5 列目と 8 列目の真理値が一致するので、これら 2 つの論理式は同値である。

前問の 3 問目の答えと、4 問目の答えが同値であるか、真理値表をつかって調べなさい。

解答例. 必要条件と十分条件なので、明らかに同値でなさそうだが、ここでは、真理値表を書くよう求められているので、そうするしかない。

便宜上、$S \Rightarrow (T \Rightarrow (J \wedge (\neg B)))$ を C とし、$S \Rightarrow ((J \wedge (\neg B)) \Rightarrow T)$ を D とする。

S	T	J	B	$\neg B$	$J \wedge (\neg B)$	$T \Rightarrow (J \wedge (\neg B))$	C	$(J \wedge (\neg B)) \Rightarrow T$	D
T	T	T	T	F	F	F	F	T	T
T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F	T	T
T	T	F	F	T	F	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	F	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T	F	T
F	F	F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	F	T	T	T	T

真理値表の 8 列目と 10 列目の真理値が一致しないので、これら 2 つの論理式は同値でない。

問 3 次の日本語の文を述語論理の論理式として表現しなさい。原子命題は適宜選択せよ。

解答にあたって：ここでは、以下の原子論理式を使う。Parent(x,y): 「x は y の親である」、Has(x,y): 「x は y を飼う」、Cat(x): 「x は猫である」、PetLover(x): 「x はペット愛好家である」、Loves(x,y): 「x は y を愛する」。

(a) すべての人には親がいるが、すべての人の親である人はいない。

解答例. $(\forall x.\ \exists y.\ Parent(x,y)) \wedge \neg(\exists y.\ \forall x.\ Parent(x,y))$.

(b) 猫を (1 匹以上) 飼っているすべての人は、ペット愛好家である。

解答例. $\forall x.\ ((\exists y.\ Has(x,y) \wedge Cat(y)) \Rightarrow PetLover(x))$.

(c) (やや難問) 猫を (1 匹以上) 飼っているすべての人は、自分の猫 (すべて) を愛する。

解答例. $\forall x.\ ((\exists y.\ Has(x,y) \wedge Cat(y)) \Rightarrow \forall y.\ ((Has(x,y) \wedge Cat(y)) \Rightarrow Loves(x,y)))$.