離散構造 期末試験, 2013 年 3 月 8 日 (金)

解答用紙は 2 枚である．**2 枚ともに**，学籍番号と氏名を記入すること．裏を使用してもよい．問題の順番通りに解答を記述する必要はない．それぞれの解答の冒頭には，必ず**問題番号を明記**せよ．全ての解答において，答だけを書くのではなく，その根拠を述べなさい．(ただし,「答だけで良い」と明示された問題を除く．)

問 1． ある会社における新入社員の採用の手続きは，以下のような承認のルールに従って行われる．

ルール 1: 人事課長も財務課長もともに応募者の採用を承認すると，応募者は採用される．

ルール 2: 財務課長が応募者の採用を承認しないならば，人事課長も応募者の採用を承認しない．

ルール 3: 人事課長も財務課長もともに応募者の採用を承認しない場合，応募者は採用されない．

ルール 4: 財務課長と役員会議で応募者の採用が承認されると，応募者は採用される．

ルール 5: 役員会議で応募者の採用が承認されるとき，かつそのときに限り，人事課長か財務課長の少なくとも一方が応募者の採用を承認している．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1-a) 次の原子文 P，Q，R，S を使って，上記の 5 つの条件をそれぞれ命題論理の論理式によって表現せよ．

- P：人事課長が応募者の採用を承認する．
- Q：財務課長が応募者の採用を承認する．
- R：役員会議で応募者の採用を承認する．
- S：応募者が採用される．

(1-b) ルール 1，2，3 が全て満たされるとき（ただしルール 4 と 5 は満たされているかどうか分からないとき)，「人事課長か財務課長の少なくとも一方が応募者の採用を承認をする場合，応募者は採用される」という命題が常に成り立つか否かを答えよ．

(1-c) ルール 1，3，4，5 が全て満たされるとき（ただしルール 2 は満たされているかどうか分からないとき)，財務課長が応募者の採用を承認し，人事課長も役員会議も採用を承認せず，なおかつ応募者が採用されないようなことが起こり得るか否かを答えよ．

(1-d) ルール 1 から 5 が全て満たされているとする．このとき，応募者が採用されるための必要十分条件を，S を含まない論理式として表せ．

問 2. $\mathcal{N}$ を自然数の集合とし，$\mathcal{N}_k = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x \leq k\}$ とする．また，$S = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid x \geq y\}$ とする．関数 $f : S \to \mathcal{N}$ と関数 $h_i : \mathcal{N}_i \to \mathcal{N}$ (ただし $i \in \mathcal{N}$) を次のように定義する．

$$f(\langle x, y\rangle) = \frac{x^2 + x}{2} + y$$
$$h_i(y) = f(\langle i, y\rangle)$$

たとえば，$f(\langle 3, 1\rangle) = 7$ なので $h_3(1) = 7$ である．また，$\langle 1, 3\rangle \notin S$ なので，$f(\langle 1, 3\rangle)$ の値は定義されない．

(2-a) $y = 0, 1, 2, 3$ に対して $f(\langle 3, y\rangle)$ の値を計算することにより，h_3 による $\mathcal{N}_3$ の像 $h_3(\mathcal{N}_3)$ を求めなさい．

(2-b) i を自然数とするとき，関数 h_i が単射であるか，答えなさい．(簡潔に理由を述べなさい．)

(2-c) i を自然数とするとき，関数 h_i が全射であるか，答えなさい．(簡潔に理由を述べなさい．)

(2-d) 自然数 i, j, x_1, x_2 に対して，$i < j$, $x_1 \in \mathcal{N}_i$, $x_2 \in \mathcal{N}_j$ であるとする．この時，$h_i(x_1) < h_j(x_2)$ であることを示しなさい．ただし，任意の $x \in \mathcal{N}$ に対して，$f(\langle x, x\rangle) < f(\langle x + 1, 0\rangle)$ であることを証明なしに使ってもよい．

(2-e) f の定義域が S であることに注意して，f が逆関数をもつかどうか，理由とともに答えなさい．

問 3. $T = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq 15\}$ と定め，T 上の二項関係 R_i $(i = 1, 2, 3)$ を次のように定義する．

$$(x\ R_1\ y) \Leftrightarrow\ ((y = 2x) \vee (y = 2x + 1))$$
$$(x\ R_2\ y) \Leftrightarrow\ x \text{ のすべての約数は } y \text{ の約数である}$$
$$(x\ R_3\ y) \Leftrightarrow\ (3^x - 3^y) \text{ が } 15 \text{ で割り切れる}$$

なお，R_3 の右辺の $3^x - 3^y$ は，負の数でもよいことに注意せよ．たとえば，$1\ R_3\ 5$ は $3^1 - 3^5 = -240$ が 15 で割り切れるので成立する．

(3-a) 有向グラフ G_1 は，頂点の集合が上記の T であり，頂点 x から頂点 y への辺があることと $x\ R_1\ y$ が成立することが同値であるとする．この時，有向グラフ G_1 を図で示しなさい．

(3-b) 有向グラフ G_1 の頂点の数，辺の数，最も長い単純道 (同じ辺を 2 回以上通らない道) の長さを答えなさい．

(3-c) R_3 に対して，$x\ R_3\ 1$ が成立する $x \in T$ を全て列挙しなさい．(ヒント: a と b の積 $a \cdot b$ を 15 で割った余りは,「a を 15 で割った余り」と「b を 15 で割った余り」の積を 15 で割った余りと等しい．)

(3-d) $R_2 \circ R_2 = R_2$ が成立するかどうか，理由とともに答えよ．

(3-e) R_1, R_2, R_3 の中に同値関係はあるか，理由とともに答えよ．

問 4. $\Sigma = \{1, 2, (,)\}$ 上の文字列の集合 S を，以下の帰納的定義によって与える.（なお，以下で S の要素を「...」で囲むことにより，説明文と区別する.）

- 「1」,「2」はそれぞれ S の要素である.
- s と t がそれぞれ S の要素であれば,「(st)」は S の要素である.

また，自然数の集合を $\mathcal{N}$ とし，関数 $f_n : S \to List_{\mathcal{N}}$ （ただし $n \in \mathcal{N}$）と関数 $g : List_{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$ を以下のように定義する.

$$f_n(s) = \begin{cases} \langle 1 \cdot n \rangle & (\text{if } s = \text{「}1\text{」}) \\ \langle 2 \cdot n \rangle & (\text{if } s = \text{「}2\text{」}) \\ f_n(t_1) \oplus f_n(t_2) & (\text{if } s = \text{「}(t_1 t_2)\text{」}) \end{cases}$$

$$g(L) = \begin{cases} 0 & (\text{if } s = \langle\ \rangle) \\ g(L') + x & (\text{if } L = \text{cons}(x, L')) \end{cases}$$

ただし，f_n の定義の $1 \cdot n$ 等は，自然数のかけ算を表す．$\oplus$ はリストを連結する（concatenate）関数であり，以下のように帰納的に定義される.

$$L_1 \oplus L_2 = \begin{cases} L_2 & (\text{if } L_1 = \langle\ \rangle) \\ \text{cons}(x, (L' \oplus L_2)) & (\text{if } L_1 = \text{cons}(x, L')) \end{cases}$$

これらについて，以下の問いに答えよ.

(4-a) 「((1(21))2)」は S の要素であるかどうか，理由を付けて答えよ.

(4-b) $f_3((2(21)))$ を，定義に従って計算せよ．ただし計算の過程を明記すること.

(4-c) $g(\text{cons}(2, \text{cons}(1, \text{cons}(3, \langle\ \rangle))))$ を，定義に従って計算せよ．ただし計算の過程を明記すること.

(4-d) S の要素が与えられたとき，その中に「1」が出現する回数を対応付ける関数 $\text{one} : S \to \mathcal{N}$ を定義せよ.

(4-e) 任意の $n \in \mathcal{N}$ と任意の $s \in S$ について，$g(f_n(s)) = (2n \cdot \text{two}(s)) + (n \cdot \text{one}(s))$ が成り立つことを証明せよ．ただしここで，one は問 (4-d) で定義した関数とし，また $\text{two} : S \to \mathcal{N}$ は，与えられた文字列に対して，その中に「2」が出現する回数を対応付ける関数であるとする．また，証明において，$g(L_1 \oplus L_2) = g(L_1) + g(L_2)$ が任意の $L_1, L_2 \in List_{\mathcal{N}}$ に対して成立することを証明なしに用いても良いものとする.