離散構造 期末試験, 2012 年 3 月 2 日 (金)

解答用紙は 2 枚である．**2 枚ともに**，学籍番号と氏名を記入すること．裏を使用してもよい．問題の順番通りに解答を記述する必要はない．それぞれの解答の冒頭には，必ず**問題番号を明記**せよ．全ての解答において，答だけを書くのではなく，その根拠を述べなさい．(ただし,「答だけで良い」と明示された問題を除く．)

問 1 (論理)

あるドアの施錠システムは，青いスイッチと赤いスイッチ，ドアの鍵，および警告ランプから構成されている．青と赤の 2 つのスイッチの状態はそれぞれ ON であるか，または，OFF であるか (ON でないか) であり，ドアの鍵の状態はロックされているか，そうでないかである．また，警告ランプの状態は点灯と消灯の 2 つである．このシステムについて，以下の 5 つの条件を考える．

条件 1.	青いスイッチと赤いスイッチが共に ON であることはない．
条件 2.	青いスイッチが ON であるとき，ドアの鍵はロックされていない．
条件 3.	赤いスイッチが ON であるとき，ドアの鍵はロックされている．
条件 4.	青いスイッチと赤いスイッチが共に OFF である (ON でない) とき，警告ランプは点灯している．
条件 5.	ドアの鍵がロックされていないとき，かつそのときに限り，警告ランプは点灯している．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1-a) 次の原子命題 P，Q，R，S を使って，上記の 5 つの条件をそれぞれ論理式（命題）として表現せよ．

P:	青いスイッチが ON である．
Q:	赤いスイッチが ON である．
R:	ドアの鍵がロックされている．
S:	警告ランプが点灯している．

(1-b) 上記の条件 1，2，3 を満たすシステム (条件 4, 5 は満たすかどうかわからない) では,「青いスイッチと赤いスイッチが共に ON でないときは，ドアの鍵はロックされていない」という性質は常に真となるか否かを答えよ．

(1-c) 上記の条件 1，2，3，4 を満たすシステム (条件 5 は満たすかどうかわからない) では，2 つのスイッチの状態と警告ランプの状態だけからは，ドアの鍵がロックされているか否かを判断できないことがある．それはどのような場合か．判断できない場合の 2 つのスイッチの状態と警告ランプの状態の組み合わせを全て列挙せよ．

(1-d) 上記の条件 1，2，3，4，5 を全て満たすシステムでは，青いスイッチと赤いスイッチが共に OFF である (ON でない) ときに，ドアの鍵がロックされているか否かを答えよ．ただし，どちらの場合もあり得るときには，そのように答えよ．

問 2 (集合と関数)

$\mathcal{N}$ をすべての自然数からなる集合とし，$\mathcal{N}_k = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \le x < k\}$ とする．$\texttt{mod}(x,\ y)$ は，自然数 x を正の自然数 y で割った余りを表す.

関数 $f : \mathcal{N}_{31} \to \mathcal{N}_{31}$ を $f(x) = \texttt{mod}(3x+1,\ 31)$ と定義し，関数 $h_n : \mathcal{N}_{31} \to \mathcal{N}_{31}$ (ただし，$0 < n < 31$) を次のように定める.

$$h_n = \begin{cases} f & (\text{if } n = 1) \\ h_{n-1} \circ f & (\text{if } n > 1) \end{cases}$$

たとえば，$f(16) = \texttt{mod}(49,\ 31) = 18$ であり，$h_2(5) = f(f(5)) = f(16) = 18$ である.

(2-a) 集合 $S_0 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ に対して，関数 f による S_0 の像 $f(S_0)$ を求めなさい.

(2-b) $h_2(3)$ の値を計算しなさい.

(2-c) 全ての $S, T \in 2^{\mathcal{N}_{31}}$ に対して，$f(S) \cup f(T) = f(S \cup T)$ が成立するかどうか，理由とともに答えなさい.

(2-d) f が全射かどうか，また，単射かどうか，答えなさい.

(2-e) h_3 が全射かどうか，また，単射かどうか，答えなさい.

(2-f: 発展問題) $1 \le m, n \le 29$ かつ $m + n = 30$ となる任意の m, n に対して，h_m は h_n の逆関数であることを示しなさい.

問 3 (関係とグラフ)

集合 S を $S = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \le x \le 30\}$ と定め，S 上の二項関係 R を以下のように定義する．ただし，$Even(x)$ は「x が偶数である」ことを意味し，$Odd(x)$ は「x が奇数である」ことを意味する.

$$xRy \;\Leftrightarrow\; ((Even(x) \wedge x = 2y) \vee (x \ne 1 \wedge Odd(x) \wedge y = 3x + 1))$$

(3-a) R を有向グラフとして図示しなさい．すなわち，集合 S の要素を頂点とし，$x\ R\ y$ が成立するときに，頂点 x から頂点 y への辺があるとして構成される有向グラフを図示しなさい．(以降では，この有向グラフを G とする．)

(3-b) 有向グラフ G のサイズ (辺の総数) を答えなさい.

(3-c) 有向グラフ G において，最も長い単純道 (同じ辺を 2 回以上通らない道) の長さを答えなさい.

(3-d) 有向グラフ G に閉路 (cycle) があるかどうか答えなさい.

(3-e) S 上の二項関係 T_1 と T_2 を以下のように定義する.

$$x\ T_1\ y \;\Leftrightarrow\; (x = y \vee \text{「有向グラフ } G \text{ において，x から y への道が存在する」})$$

$$x\ T_2\ y \;\Leftrightarrow\; (x = y \vee \text{「有向グラフ } G \text{ において，x から y への道または y から x への道が存在する」})$$

このとき T_1 が順序であるかどうか，T_2 が同値関係であるかどうかをそれぞれ答えなさい.

問 4 (帰納と関数) 自然数全体の集合を $\mathcal{N}$ とする．また集合 $\mathcal{N}^+$ を，1 から始まる自然数全体の集合（すなわち $\mathcal{N}^+ = \mathcal{N} - \{0\}$）とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(4-a) $\mathcal{N}^+$ のリストの集合 $List_{\mathcal{N}^+}$ は，以下のように帰納的に定義される．

- $\langle\ \rangle \in List_{\mathcal{N}^+}$
- $L \in List_{\mathcal{N}^+} \wedge x \in \mathcal{N}^+ \Rightarrow \mathrm{cons}(x, L) \in List_{\mathcal{N}^+}$

このとき，集合 $List_{\mathcal{N}^+}$ を用いて,「自然数のリストのうち，0 が高々1 回しか要素としてあらわれないものを全て集めた集合 U」を帰納的に定義せよ．

次に，関数 $f : List_{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$ と関数 $g : List_{\mathcal{N}} \to List_{\mathcal{N}}$ を次のように定義する．

$$f(L) = \begin{cases} 1 & (\text{if } L = \langle\ \rangle) \\ x \cdot f(L') & (\text{if } L = \mathrm{cons}(x, L')) \end{cases}$$

$$g(L) = \begin{cases} \langle\ \rangle & (\text{if } L = \langle\ \rangle) \\ \mathrm{cons}(1, g(L')) & (\text{if } L = \mathrm{cons}(0, L')) \\ \mathrm{cons}(x, g(L')) & (\text{if } L = \mathrm{cons}(x, L') \wedge x \neq 0) \end{cases}$$

ただし，f の定義の右辺に現れる「$\cdot$」は，自然数としての積を表す．

(4-b) $f(\mathrm{cons}(3, \mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(1, \langle\ \rangle))))$ と $g(\mathrm{cons}(4, \mathrm{cons}(0, \langle\ \rangle)))$ を，f と g の定義に従って計算せよ．ただし，計算の過程も明記すること．

(4-c) 自然数のリストに出現する 0 の個数と 1 の個数の和を計算する関数 $h : List_{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$ を帰納的に定義せよ．

(4-d) 任意の $L \in List_{\mathcal{N}}$ について，$f(g(L)) > 0$ が成り立つことを，リストに関する帰納法により証明せよ．