離散構造 期末試験: 問題と解答例, 2012年 3月 2日 (金)

問 1 (論理)

あるドアの施錠システムは，青いスイッチと赤いスイッチ，ドアの鍵，および警告ランプから構成されている．青と赤の 2 つのスイッチの状態はそれぞれ ON であるか，または，OFF であるか (ON でないか) であり，ドアの鍵の状態はロックされているか，そうでないかである．また，警告ランプの状態は点灯と消灯の 2 つである．このシステムについて，以下の 5 つの条件を考える．

条件 1.	青いスイッチと赤いスイッチが共に ON であることはない.
条件 2.	青いスイッチが ON であるとき，ドアの鍵はロックされていない.
条件 3.	赤いスイッチが ON であるとき，ドアの鍵はロックされている.
条件 4.	青いスイッチと赤いスイッチが共に OFF である (ON でない) とき，警告ランプは点灯している.
条件 5.	ドアの鍵がロックされていないとき，かつそのときに限り，警告ランプは点灯している.

このとき，以下の問いに答えよ．

(1-a) 次の原子命題 P，Q，R，S を使って，上記の 5 つの条件をそれぞれ論理式（命題）として表現せよ．

P :	青いスイッチが ON である.
Q :	赤いスイッチが ON である.
R :	ドアの鍵がロックされている.
S :	警告ランプが点灯している.

(解答例) 以下の通り．

1 $\neg(P \wedge Q)$.

2 $P \Rightarrow \neg R$.

3 $Q \Rightarrow R$.

4 $(\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow S$.

5 $\neg R \Leftrightarrow S$.

(1-b) 上記の条件 1，2，3 を満たすシステム (条件 4, 5 は満たすかどうかわからない) では,「青いスイッチと赤いスイッチが共に ON でないときは，ドアの鍵はロックされていない」という性質は常に真となるか否かを答えよ．

(解答例) 常に真ではない.「青いスイッチと赤いスイッチが共に ON でないときは，ドアの鍵はロックされていない」を命題で表現すると，$(\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg R$ であり、以下の真理値表でわかるように、 P, Q が偽で，R が真のとき，条件 1,2,3 は真だが，この式は偽となる．(なお、答案では、真理値表を書かなくてもきちんと推論できていればよい。)

P	Q	R	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg R$	条件 1	条件 2	条件 3	$(\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg R$
T	T	T	F	F	F	F	F	F	T	T
T	T	F	F	F	F	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	F	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T	F	T	T	T	F
F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T

(1-c) 上記の条件 1，2，3，4 を満たすシステム (条件 5 は満たすかどうかわからない) では，2 つのスイッチの状態と警告ランプの状態だけからは，ドアの鍵がロックされているか否かを判断できないことがある．それはどのような場合か．判断できない場合の 2 つのスイッチの状態と警告ランプの状態の組み合わせを全て列挙せよ．

(解答例 1) 条件 1,2,3,4 が真のとき，P が真ならば R は偽に限られ，Q が真ならば R は真に限られる．よって R の真理値が限定されないためには，P も Q も偽であることが必要である．

逆に，P, Q が偽であれば，S は真であり，このとき R は真でも偽でもよい．(このとき条件 1,2,3,4 は R の真理値によらず，すべて真になる．)

(解答例 2) 以下のように、真理値表を書けば、条件 1,2,3,4 がすべて真になるのは、7,8,9,10,13,15 行目であることがわかる。これらの行は、それぞれ、(P,Q,S)=(T,F,T),(T,F,F),(F,T,T),(F,T,F),(F,F,T),(F,F,T) に対応し、このうち、P,Q,S が同じもの (従って R のみ異なる真理値となっている) は、13 行目と 15 行目である。まとめると、(P,Q,S)=(F,F,T) の場合に、R は真か偽か判断できない。

P	Q	R	S	条件 1	条件 2	条件 3	条件 4	
T	T	T	T	F	F	T	T	
T	T	T	F	F	F	T	T	
T	T	F	T	F	T	F	T	
T	T	F	F	F	T	F	T	
T	F	T	T	T	F	T	T	
T	F	T	F	T	F	T	T	
T	F	F	T	T	T	T	T	条件 1-4 が全て成立
T	F	F	F	T	T	T	T	条件 1-4 が全て成立
F	T	T	T	T	T	T	T	条件 1-4 が全て成立
F	T	T	F	T	T	T	T	条件 1-4 が全て成立
F	T	F	T	T	T	F	T	
F	T	F	F	T	T	F	T	
F	F	T	T	T	T	T	T	条件 1-4 が全て成立
F	F	T	F	T	T	T	F	
F	F	F	T	T	T	T	T	条件 1-4 が全て成立
F	F	F	F	T	T	T	F	

(1-d) 上記の条件 1，2，3，4，5 を全て満たすシステムでは，青いスイッチと赤いスイッチが共に OFF である (ON でない) ときに，ドアの鍵がロックされているか否かを答えよ．ただし，どちらの場合もあり得るときには，そのように答えよ．

(解答例) 青いスイッチと赤いスイッチが共に OFF である (ON でない) ときは条件 4 から S が真であり，条件 5 からドアの鍵がロックされていない．

(この場合も、もちろん真理値表を書いて解いてもよい。)

問 2 (集合と関数)

$\mathcal{N}$ をすべての自然数からなる集合とし，$\mathcal{N}_k = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \le x < k\}$ とする．$\mathtt{mod}(x,\ y)$ は，自然数 x を正の自然数 y で割った余りを表す．

関数 $f : \mathcal{N}_{31} \to \mathcal{N}_{31}$ を $f(x) = \mathtt{mod}(3x+1,\ 31)$ と定義し，関数 $h_n : \mathcal{N}_{31} \to \mathcal{N}_{31}$ (ただし，$0 < n < 31$) を次のように定める．

$$h_n = \begin{cases} f & (\text{if } n = 1) \\ h_{n-1} \circ f & (\text{if } n > 1) \end{cases}$$

たとえば，$f(16) = \mathtt{mod}(49,\ 31) = 18$ であり，$h_2(5) = f(f(5)) = f(16) = 18$ である．

(2-a) 集合 $S_0 = \{0,1,2,3,4\}$ に対して，関数 f による S_0 の像 $f(S_0)$ を求めなさい．

(解答例) $f(S_0) = \{f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)\} = \{1,4,7,10,13\}$ である．

(2-b) $h_2(3)$ の値を計算しなさい．

(解答例) $h_2(3) = (h_1 \circ f)(3) = (f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(10) = 0$ である．

(2-c) 全ての $S, T \in 2^{\mathcal{N}_{31}}$ に対して，$f(S) \cup f(T) = f(S \cup T)$ が成立するかどうか，理由とともに答えなさい．

(解答例) 成立する．

(答案では，以下のように完全に証明しなくてもよく，根拠を簡潔にのべればよいが，ここではきちんと証明してみよう．)

まず $f(S) \cup f(T) \subset f(S \cup T)$ を示す．$x \in f(S) \cup f(T)$ と仮定する．すると，$x \in f(S)$ または $x \in f(T)$ である．

(Case 1) $x \in f(S)$ とする．ある $y \in S$ があって $x = f(y)$ である．$y \in S \cup T$ なので $x \in f(S \cup T)$ である．

(Case 2) $x \in f(T)$ の場合も (Case 1) と同様である．

以上から，Case 1,2 のいずれでも $x \in f(S \cup T)$ がいえた．よって，$f(S) \cup f(T) \subset f(S \cup T)$ が示された．

次に $f(S \cup T) \subset f(S) \cup f(T)$ を示す．$x \in f(S \cup T)$ と仮定する．ある $y \in S \cup T$ があって $x = f(y)$ である．$y \in S$ または $y \in T$ である．

(Case 1') $y \in S$ とする．すると $x \in f(S)$ である．よって $x \in f(S) \cup f(T)$ である．

(Case 2') $y \in T$ とする．これも同様．

以上から，Case 1',2' のいずれでも $x \in f(S) \cup f(T)$ がいえた．よって，$f(S) \cup f(T) \supset f(S \cup T)$ が示された．

以上から，$f(S) \cup f(T) = f(S \cup T)$ が示された．

(補足) 証明で f の定義をまったく使っていないことからわかるように，本問の性質は、どういう関数 f であっても成立する性質である．

(2-d) f が全射かどうか，また，単射かどうか，答えなさい．

(解答例) f は全単射である．

その理由: $x = 0, 1, \cdots, 30$ に対して $f(x)$ の値を具体的に計算すると，

$$1,4,7,10,13,16,19,22,25,28,0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,2,5,8,11,14,17,20,23,26,29$$

となり，$\mathcal{N}31$ の全ての値が 1 回ずつあらわれるので全単射であることがわかる．

(2-e) h_3 が全射かどうか，また，単射かどうか，答えなさい．

(解答例: 素朴なやりかた) h_3 は全単射である．

全単射になる理由: まず，$h_3 = f \circ f \circ f$，つまり，$h_3(x) = f(f(f(x))) = \mathtt{mod}(27x + 13,\ 31)$ である．このことから，$x = 0, 1, \cdots, 30$ に対して $h_3(x)$ の値を具体的に計算すると，

$$13,9,5,1,28,24,20,16,12,8,4,0,27,23,19,15,11,7,3,30,26,22,18,14,10,6,2,29,25,21,17$$

となり，確かに全単射である．

(別解: 少しエレガントなやりかた) 全射になる理由: $h_3 = (f \circ f) \circ f$ であるが,「2 つの全射の合成関数は全射になる」から，f が全射であることから，$f \circ f$ は全射である．もう 1 度「2 つの全射の合成関数は全射」ということを使って，h_3 が全射になる．

単射になる理由: 「2 つの単射の合成関数は単射になる」ことから，全射のときと同様に導ける．

(2-f) $1 \le m,n \le 29$ かつ $m+n=30$ となる任意の m,n に対して，h_m は h_n の逆関数であることを示しなさい．

(解答例) まず，f を m 回合成した関数を f^m と書くことにする．たとえば，$f^3 = f \circ f \circ f$ である．

$m+n=30$ のとき，$h_m \circ h_n = f^m \circ f^n = f^{m+n} = f^{30}$ である．同様に，$h_n \circ h_m = f^{30}$ である．よって，f^{30} が恒等関数であること，つまり $f^{30}(x) = x$ を示せばよい．これを示すには，またしても，2 通りの方法がある．

($f^{30}(x) = x$ を示す素朴な方法) $1, f(1), f^2(1), f^3(1), \cdots, f^{30}(1)$ を次々と計算すると，

$$1, 4, 13, 9, 28, 23, 8, 25, 14, 12, 6, 19, 27, 20, 30, 29, 26, 17, 21, 2, 7, 22, 5, 16, 18, 24, 11, 3, 10, 0, 1$$

となり，f^{30} で 1 にもどってくる．また，この系列で，同じ数は (最初と最後の 1 以外には) ない．よって，この系列にあらわれる全ての数 x に対して，$f^{30}(x) = x$ である．また，この系列にあらわれない数で $\mathcal{N}_{31}$ の要素は 15 だけであるが，$f(15) = 15$ なので，$f^{30}(15) = 15$ である．よって，$x \in \mathcal{N}_{31}$ である任意の x に対して $f^{30}(x) = x$ である．

($f^{30}(x) = x$ を示すエレガントな方法) 簡単な計算により，

$$f^{30}(x) = \mathtt{mod}(3^{30}x + 3^{29} + 3^{28} + 3^{27} + \cdots + 3^2 + 3 + 1,\ 31)$$

であることがわかる．ここで，$\mathtt{mod}(3^{30},\ 31)$ を一生懸命計算すると，1 であることがわかる．よって，

$$f^{30}(x) = \mathtt{mod}(x + 3^{29} + 3^{28} + 3^{27} + \cdots + 3^2 + 3 + 1,\ 31)$$

である．さらに，

$$3^{29} + 3^{28} + 3^{27} + \cdots + 3^2 + 3 + 1 = \frac{3^{30} - 1}{3 - 1}$$

であるので，これを 31 で割った余りは，0 である．(3^{30} を 31 で割った余りが 1 であるので．) よって，

$$f^{30}(x) = \mathtt{mod}(x,\ 31)$$

となり，$x \in \mathcal{N}_{31}$ ということを考えると，$f^{30}(x) = x$ となる．

補足上記の「エレガントな方法」で,「$\mathtt{mod}(3^{30},\ 31)$ を一生懸命計算する」という部分をどうやればいいだろうか．これをやる方法は，1 つには，$3^2 = 9$, $9 * 3 = 27$, $\mathtt{mod}(27 * 3,\ 31) = 19$, $\mathtt{mod}(19 * 3,\ 31) = 26$ という具合いにひたすら計算する，というものである (途中で，31 で割ったあまりに置きかえるのがポイントである．そうしないと，3^{30} は巨大すぎて，とても手に負えない)．今回の問題の場合，たった 30 回の計算で済むのだから，これでよい．

補足の補足 (蛇足) 実は,「Fermat の小定理」とよばれる定理により，$\mathtt{mod}(x^{30},\ 31) = 1$ であることは保証されている．(31 が素数なので，$x = 3$ でなくても，どんな x でも，このことは成立する)．Fermat の小定理については，インターネット上にいろいろな文献があるので，(特に，暗号や整数論に興味がある人は) 見てみるとよい．もっとも，本問を解くにあたって Fermat の小定理を知っている必要はまったくない．

問 3 (関係とグラフ)

集合 S を $S = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \le x \le 30\}$ と定め，S 上の二項関係 R を以下のように定義する．ただし，$Even(x)$ は「x が偶数である」ことを意味し，$Odd(x)$ は「x が奇数である」ことを意味する．

$$xRy \ \Leftrightarrow\ ((Even(x) \wedge x = 2y) \vee (x \neq 1 \wedge Odd(x) \wedge y = 3x + 1))$$

(3-a) R を有向グラフとして図示しなさい．すなわち，集合 S の要素を頂点とし，$x\ R\ y$ が成立するときに，頂点 x から頂点 y への辺があるとして構成される有向グラフを図示しなさい．(以降では，この有向グラフを G とする．)

(解答例) 図 1 の通り．

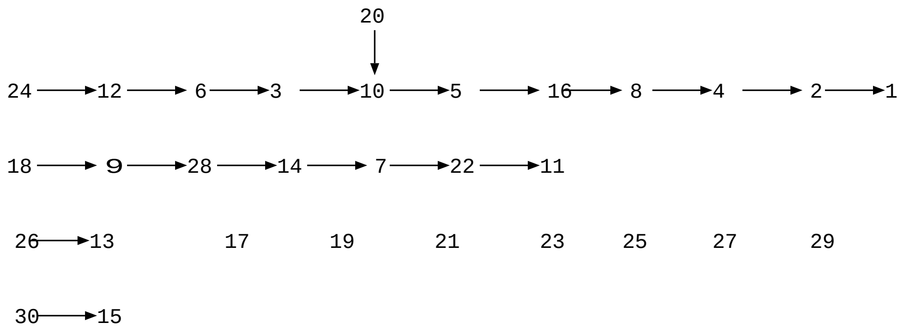

図 1: (3-a) の解答

(3-b) 有向グラフ G のサイズ (辺の総数) を答えなさい．

(解答例) 図 1 より，19 本となる．

(具体的に数えなくても，以下のように考えてもよい．1 以上 30 以下の全ての偶数 x に対して，xRy となる y が唯一つ存在する (辺の数は合計 15 本)．また，3 以上 9 以下の全ての奇数 x に対して，xRy となる y も唯一つ存在する (辺の数は合計 4 本)．それ以外の奇数 x に対しては，xRy となる y は存在しない．これらを合計して辺の数は 19 本となる．)

(3-c) 有向グラフ G において，最も長い単純道 (同じ辺を 2 回以上通らない道) の長さを答えなさい．

(解答例) 図 1 より，頂点 24 から頂点 1 に行く単純道が一番長く，長さは 10 となる．

(3-d) 有向グラフ G に閉路 (cycle) があるかどうか答えなさい．

(解答例) 図 1 より，閉路は存在しない．

(3-e) S 上の二項関係 T_1 と T_2 を以下のように定義する．

$$x\ T_1\ y \iff (x = y \vee \text{「有向グラフ } G \text{ において，x から y への道が存在する」})$$

$$x\ T_2\ y \iff (x = y \vee \text{「有向グラフ } G \text{ において，x から y への道または y から x への道が存在する」})$$

このとき T_1 が順序であるかどうか，T_2 が同値関係であるかどうかをそれぞれ答えなさい．

(解答例) T_1 は順序である．

理由: 任意の x に対して xT_1x が成立することから，反射律は満たす．また，xT_1y かつ yT_1z と仮定すると，G において，x から y へ道があり，y から z へ道があるのだから，x から z へ道がある．よって，xT_1z となり，推移律も満たす．さらに，xT_1y かつ yT_1x と仮定すると，x から y へ道があり，さらに y から x へ道があることになるが，G には閉路はないので，このようになるのは，$x = y$ の時にかぎる．よって反対称律も成立する．

(解答例) T_2 は同値関係ではない．

理由: 図 1 より，$3T_210$ かつ $10T_220$ であるが，3 から 20 へ行く道はないし，20 から 3 へ行く道もない．よって，$3T_220$ は不成立であり，推移律が成立しない．

(補足) 本問では，30 以下の自然数に限定したが，一般に，どんな自然数から始めても，「偶数は 2 で割り，奇数なら 3 倍して 1 を加える」という操作を繰返し適用すると，いつか必ず 1 になるようである．非常に不思議な話であるが，この事は，かなり大きな自然数まで成立することがコンピュータにより確かめられている．しかし，「どんな自然数から始めても，上記操作を繰返し適用すると必ず 1 になる (ループしたり発散したりしない)」ということの数学的証明はいまだに与えられておらず，有名な open problem (未解決問題) となっている．

問 4 (帰納と関数) 自然数全体の集合を $\mathcal{N}$ とする．また集合 $\mathcal{N}^+$ を，1 から始まる自然数全体の集合（すなわち $\mathcal{N}^+ = \mathcal{N} - \{0\}$）とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(4-a) $\mathcal{N}^+$ のリストの集合 $List_{\mathcal{N}^+}$ は，以下のように帰納的に定義される．

- $\langle\ \rangle \in List_{\mathcal{N}^+}$
- $L \in List_{\mathcal{N}^+} \wedge x \in \mathcal{N}^+ \Rightarrow \mathrm{cons}(x, L) \in List_{\mathcal{N}^+}$

このとき，集合 $List_{\mathcal{N}^+}$ を用いて,「自然数のリストのうち，0 が高々1 回しか要素としてあらわれないものを全て集めた集合 U」を帰納的に定義せよ．

(解答例) 以下のように定義するとよい．

- $\langle\rangle \in U$.
- $L \in List_{\mathcal{N}^+} \Rightarrow \mathrm{cons}(0, L) \in U$.
- $(L \in U \wedge x \in \mathcal{N}^+) \Rightarrow \mathrm{cons}(x, L) \in U$.

基本アイディアは,「空リストか，あるいは，0 を先頭にのみ含むリスト」からはじめて，このリストに 1 以上の要素を追加していくことにより，U にはいるべき要素をすべて作りだせることである．なお，この他の解も多数存在する．

次に，関数 $f : List_{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$ と関数 $g : List_{\mathcal{N}} \to List_{\mathcal{N}}$ を次のように定義する．

$$f(L) = \begin{cases} 1 & (\text{if } L = \langle\ \rangle) \\ x \cdot f(L') & (\text{if } L = \mathrm{cons}(x, L')) \end{cases}$$

$$g(L) = \begin{cases} \langle\ \rangle & (\text{if } L = \langle\ \rangle) \\ \mathrm{cons}(1, g(L')) & (\text{if } L = \mathrm{cons}(0, L')) \\ \mathrm{cons}(x, g(L')) & (\text{if } L = \mathrm{cons}(x, L') \wedge x \neq 0) \end{cases}$$

ただし，f の定義の右辺に現れる「$\cdot$」は，自然数としての積を表す．

(4-b) $f(\mathrm{cons}(3, \mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(1, \langle\ \rangle))))$ と $g(\mathrm{cons}(4, \mathrm{cons}(0, \langle\ \rangle)))$ を，f と g の定義に従って計算せよ．ただし，計算の過程も明記すること．

(解答例) 以下の通り．

$$\begin{aligned} f(\mathrm{cons}(3, \mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(1, \langle\ \rangle)))) &= 3 \cdot f(\mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(1, \langle\ \rangle))) \\ &= 3 \cdot (2 \cdot f(\mathrm{cons}(1, \langle\ \rangle))) \\ &= 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot f(\langle\ \rangle))) \\ &= 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 1)) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\mathrm{cons}(4, \mathrm{cons}(0, \langle\ \rangle))) &= \mathrm{cons}(4, g(\mathrm{cons}(0, \langle\ \rangle))) \\ &= \mathrm{cons}(4, \mathrm{cons}(1, g(\langle\ \rangle))) \\ &= \mathrm{cons}(4, \mathrm{cons}(1, \langle\ \rangle)) \end{aligned}$$

(4-c) 自然数のリストに出現する 0 の個数と 1 の個数の和を計算する関数 $h : List_{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$ を帰納的に定義せよ．

(解答例) 以下の通り．

$$h(L) = \begin{cases} 0 & (\text{if } L = \langle\rangle) \\ 1 + h(L') & (\text{if } L = \text{cons}(x, L') \wedge (x = 0 \vee x = 1)) \\ h(L') & (\text{if } L = \text{cons}(x, L') \wedge \neg(x = 0 \vee x = 1)) \end{cases}$$

(4-d) 任意の $L \in List_{\mathcal{N}}$ について，$f(g(L)) > 0$ が成り立つことを，リストに関する帰納法により証明せよ．

(解答例) 以下の通り．

(Case 1: $L = \langle\rangle$ のとき) $f(g(L)) = f(\langle\rangle) = 1 > 0$ となり，$g(f(L)) > 0$ が成立する．

(Case 2: $L = \text{cons}(x, L')$ かつ $x \in \mathcal{N}$ かつ $L' \in List_{\mathcal{N}}$ のとき) x の値に応じて，2 つに場合分けする．

(Subcase 1: $x = 0$ のとき) $f(g(L)) = f(g(\text{cons}(0, L'))) = f(\text{cons}(1, g(L'))) = 1 \cdot f(g(L'))$ となるが，帰納法の仮定より $f(g(L')) > 0$ なので，$f(g(L)) > 0$ である．

(Subcase 2: $x \neq 0$ のとき) $f(g(L)) = f(g(\text{cons}(x, L'))) = f(\text{cons}(x, g(L'))) = x \cdot f(g(L'))$ となるが，帰納法の仮定より $f(g(L')) > 0$ であり，さらに $x > 0$ なので，$f(g(L)) > 0$ である．

以上より，L に関する帰納法により，任意の $L \in List_{\mathcal{N}}$ に対して，$f(g(L)) > 0$ が成り立つことが証明できた．