離散構造 期末試験 (1,2 クラス用) 解答例

2011 年 3 月 4 日 (金)

問 1 (論理)

ある会社の従業員は、Alice, Bob, Charlie, David, Emily の 5 人であり、彼らの勤務状況については、以下の条件がある。

Alice か Bob の少なくとも一方は勤務する。
Charlie と David のうち、どちらか一方だけが勤務する。
Emily が勤務するなら、Charlie も勤務する。
David と Emily は両方とも勤務するか、あるいは、どちらも勤務しない。
Bob が勤務するなら、Emily と Alice の少なくとも一方は勤務する。

X を 5 人の従業員のいずれかとするとき、「X が勤務する (勤務している)」を表す原子論理式を、単に X と書く。たとえば、Alice という原子論理式は、「Alice が勤務している」という内容を表す。(なお、解答にあたっては Alice 等を、頭文字の A 等で表してもよい。)

(1-a: 配点 5 点) 上記の 5 つの条件をそれぞれ命題として表現せよ。(答だけで良い。)

(答) 順に $A \vee B$, $(C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D)$, $E \Rightarrow C$, $D \Leftrightarrow E$, $B \Rightarrow (E \vee A)$ と表現できる。なお、他にも同値な式は多い。たとえば、2 番目の式は $C \Leftrightarrow \neg D$ でもよい。同値な式である限り、正答とした。

(1-b: 配点 5 点) 上記の 5 つの条件が同時に真となることがあるか。

(答) ある。真理値表を作ると A, B, C を真にして、D, E を偽にするとき、5 つの条件が全て真になる。(あるいは、A, C を真にして、他を偽にするとき)

(補足) そのまま真理値表を作ると、原子命題が 5 個あるので $2^5 = 32$ 行になってしまい、やや大き過ぎる。この場合、4 番目の式が真のとき D と E の真理値は同じでなければいけないし、2 番目の式が真ならば、C と D の真理値は逆でなければいけないので、D の真理値を決めれば C, E は一意的に定まる。よって、A, B, D の 3 つの原子論理式の真偽の組合せで 8 行の真理値表を書けばよい。なお、真理値表を書かずに、理詰めで解いてもよい。

(1-c: 配点 5 点) 上記の 5 つの条件がすべて成立するとき、Emily と Alice が 2 人とも勤務することは可能か。

(答) 可能でない。前問の答えより、可能な組合せは A, B, C を真にして他を偽にするか、A, C を真にして他を偽にするか、の 2 つしかないので、どちらにしても、E が真になることはできない。

(補足) これも、理詰めで解いてもよい。

(1-d: 配点 5 点) 上記の 5 つの条件のうち 1 つだけを変更して、従業員 5 人全員が勤務できるようにしたい。どの条件を変更すればよいか。

(答) A, B, C, D, E が全て真のとき、5 つの条件のうち 2 番目以外はすべて真となり、2 番目だけが偽である。よって、2 番目の条件を変更すればよい。具体的には「Charlie と David のうち、少なくとも一方が勤務する。」や「Charlie と David が両方とも勤務する。」などに変更すればよい。

(補足) どう変更するかは問題にはいっていないので、答えなくても良い。

問 2 (集合と関数)

$\mathcal{N}$ を自然数の集合とし、$\mathcal{N}_k = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < k\}$ と定義する。$\mathtt{mod}(x, y)$ は、自然数 x を正の自然数 y で割った余りを表す。

関数 $f_n : \mathcal{N}_{10} \to \mathcal{N}_{10}$ と関数 $g : \mathcal{N}_{11} \to 2^{\mathcal{N}_{11}}$ を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= \mathtt{mod}(nx, 10) \\
g(x) &= \{y \in \mathcal{N}_{11} \mid \mathtt{mod}(x^y, 11) = 1\}
\end{aligned}
$$

(2-a: 配点 5 点) f_6 による集合 $\mathcal{N}_5$ の像 $f_6(\mathcal{N}_5)$ を求めなさい。

(答)「像」の定義により、$f_6(\{0,1,2,3,4\}) = \{f_6(0), f_6(1), f_6(2), f_6(3), f_6(4)\} = \{0,6,2,8,4\} = \{0,2,4,6,8\}$ となる。

(補) 「像」の話をしているので、答えは必ず集合になる。

(2-b: 配点 5 点) $S \subset \mathcal{N}_{10}$ および $T \subset \mathcal{N}_{10}$ とする。この時 $f_n(S-T) = f_n(S) - f_n(T)$ が成立するか否か簡潔な理由とともに答えなさい。

(答) 必ずしも成立しない。反例としては、$n=6, S=\{0,5\}, T=\{0\}$ とすると、$f_n(S-T) = f_n(\{5\}) = \{0\}$ であるが、$f_n(S) - f_n(T) = \{0\} - \{0\} = \{\}$ となり一致しない。

(2-c: 配点 5 点) $n \in \mathcal{N}_{10}$ とするとき、関数 f_n が全単射となる n の値を全て求めなさい。

(答) $n = 0,1,2,\cdots,9$ というすべてのケースで計算すると、$n = 1,3,7,9$ のとき全単射となることがわかる。

(別の答) n が偶数のとき、nx を 10 で割った余りは必ず偶数であるため、全射になり得ない。そこで n が奇数のときだけを調べると、$n = 1,3,7,9$ のとき全単射となることがわかる。

(もっと別の答) 有限集合から有限集合への関数なので、単射であれば必ず全単射である。そこで、単射である条件を考える。f_n が単射にならないとは、「$x \neq y \wedge f_n(x) = f_n(y)$」となる x, y が存在することと同値である。後者をいいかえると、「$x \neq y$ かつ $n(x-y)$ が 10 で割り切れ、$0 \leq x, y < 10$ を満たす x, y が存在する」ということである。n が 10 と互いに素 (最大公約数が 1) であれば、そのような x, y は存在しないし、n が 10 と互いに素でなければ、そのような x, y は存在する。よって、10 と互いに素である $n = 1,3,7,9$ が答えとなる。

(2-d: 配点 5 点) $g(2)$ と $g(3)$ のそれぞれの値を求めなさい。

(答) これはひたすら計算するしかない。$g(2) = \{y \in \mathcal{N}_{11} \mid \mathtt{mod}(2^y, 11) = 1\} = \{0, 10\}$ となり、同様に、$g(3) = \{0, 5, 10\}$ となる。

(2-e: 配点 5 点) 全ての $x, y \in \mathcal{N}_{11}$ に対して、$(g(x) \cap g(y)) \subset g(\mathtt{mod}(xy, 11))$ であることを示しなさい。

(答) 任意の $z \in (g(x) \cap g(y))$ に対して、$z \in g(\mathtt{mod}(xy, 11))$ を示したい。$z \in (g(x) \cap g(y))$ と仮定すると、$\mathtt{mod}(x^z, 11) = \mathtt{mod}(y^z, 11) = 1$ である。よって

$$\mathtt{mod}((\mathtt{mod}(xy,11))^z, 11) = \mathtt{mod}((xy)^z, 11) = \mathtt{mod}(x^z \cdot y^z, 11) = \mathtt{mod}(\mathtt{mod}(x^z, 11) \cdot \mathtt{mod}(y^z, 11), 11) = \mathtt{mod}(1 \cdot 1, 11) = 1$$

となり、$z \in g(\mathtt{mod}(xy, 11))$ が言えた。

(2-f: 配点 5 点) 関数 $h : 2^{\mathcal{N}_{11}} \to \mathcal{N}_{11}$ で、$h \circ g$ が恒等関数 (identity function) となるものがあるか答えなさい。

(答) ない。$g(3) = g(4) = \{0, 5, 10\}$ であるため、どんな関数 h に対しても、$h(g(3)) = h(g(4))$ となり、$h \circ g$ は単射にならない。

(補足) 一般に、g が単射でなければ、$h \circ g$ は単射でない。また、h が全射でなければ、$h \circ g$ は全射でない。(理由を考えよ。)

問 3 (関係とグラフ)

集合 A,B を $A = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq 7\}$、および、$B = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x \leq y\}$ と定義する。また、$\langle x_1, y_1\rangle \in B$ と $\langle x_2, y_2\rangle \in B$ に対して、集合 B 上の二項関係 R を以下のように定義する。

$$\langle x_1, y_1\rangle \; R \; \langle x_2, y_2\rangle \;\Leftrightarrow\; (((y_2 = y_1 - x_1) \wedge (x_2 = x_1)) \vee ((x_2 = y_1 - x_1) \wedge (y_2 = x_1)))$$

たとえば、$\langle 2, 6\rangle \; R \; \langle 2, 4\rangle$ が成立する。なお、$\langle x, y\rangle$ は $x \leq y$ のときのみ B の要素であることに注意せよ。

(3-a: 配点 7 点) R を有向グラフとして図示しなさい。すなわち、集合 B の要素を頂点とし、$a \; R \; b$ が成立するときに、頂点 a から頂点 b への辺があるとして構成される有向グラフを書きなさい。

(答) グラフは若干大きいので、省略。頂点数が 28 で、辺が 21 本ある有向グラフである。なお、$\langle 7, 7\rangle$ のような孤立した頂点 (辺が 1 本もつながっていない頂点) を書かない人が多かったが、このような頂点もグラフの一員なので書くようにしてほしい。

(3-b: 配点 3 点) 上記の有向グラフに閉路 (cycle) があるかどうか答えなさい。

(答) ない。グラフより明らか。(ちゃんと理由を言うとしたら $\langle x_1, y_1\rangle$ から $\langle x_2, y_2\rangle$ への辺があるとしたら、$x_1 + y_1 > x_2 + y_2$ なので、閉路はできない、と言えばよい。)

(3-c: 配点 4 点) R が順序かどうか、また、同値関係かどうか答えなさい。

(答) 順序でも同値関係でもない。なぜなら、$\langle 1, 1\rangle \; R \; \langle 1, 1\rangle$ が成立しないので、反射的でないので。

(3-d: 配点 8 点) B 上の二項関係 R' を以下のように定義するとき、R' が順序かどうか、また、同値関係かどうか答えなさい。

$\langle x_1, y_1\rangle \; R' \; \langle x_2, y_2\rangle \Leftrightarrow$「上記の有向グラフにおいて、頂点 $\langle x_1, y_1\rangle$ から頂点 $\langle x_2, y_2\rangle$ への道がある」

なお、頂点 $\langle x, y\rangle$ から、その頂点自身への道はいつでも存在する (長さ 0 の道がある) ことに注意せよ。

(答) 順序である。反射律は、「頂点からその頂点自身への道がある」ことかあ言える。推移律は、「a から b への道があり、b から c への道があれば、a から c への道がある」ことから言える。反対称律は、「a から b へ道があり、b から a へ道がある」としたら、(もともとの R は閉路がなかったので) $a = b$ の場合しかないので、成立する。

同値関係ではない。なぜなら、対称律が成立しないから。たとえば $\langle 1, 2\rangle \; R \; \langle 1, 1\rangle$ であるが、$\langle 1, 1\rangle \; R \; \langle 1, 2\rangle$ でない。

(3-e: 配点 3 点) 上記の有向グラフに対して、すべての辺の向きをなくすことにより無向グラフを得る。この無向グラフにおける連結成分の個数を答えなさい。

(答) 辺の向きをなくして考えると、$\langle 1, 1\rangle$ につながっている頂点からなるグループ、$\langle 2, 2\rangle$ につながっている頂点からなるグループ、、、、$\langle 7, 7\rangle$ につながっている頂点からなるグループの 7 個に分割される。つまり、連結成分は 7 個である。

(補足) この二項関係は、Euclid の互除法で最大公約数を求める方法を表したものであり、演習でもほぼ同様のものを扱った。そのことがわかれば、このグラフの頂点たちが、「最大公約数が 1 のグループ」、「最大公約数が 2 のグループ」、、、「最大公約数が 7 のグループ」の 7 個に分割されることは自明である。(実際、このようにグループ分けしたものは「同値関係」に対応する。) ただ、「連結成分」はテキストには明示的には書いていなくて、演習でやっただけなので、この問題は解きにくかったようで、ほとんど正答がなかった。そこで、この試験は 97 点満点と考え、全員の得点を 100/97 倍した。(つまり、97 点とれたら満点ということ。)

問 4 (帰納と関数)

集合 `RList` を次のように帰納的に定義する。ただし、$\langle\rangle$ は空リスト、$\mathcal{R}$ は実数の集合である。

- $\langle\rangle \in \mathtt{RList}$.
- $(L \in \mathtt{RList} \wedge x \in \mathcal{R}) \Rightarrow \mathrm{cons}(x, L) \in \mathtt{RList}$.

また、関数 $f : \mathtt{RList} \to \mathcal{R}$ と $g : \mathtt{RList} \times \mathtt{RList} \to \mathtt{RList}$ を以下のように定義する.

$$f(L) = \begin{cases} 1.0 & \text{if } L = \langle\rangle \\ 0.0 & \text{if } L = \mathrm{cons}(0.0, L') \\ x \cdot f(L') & \text{if } L = \mathrm{cons}(x, L') \wedge x \neq 0.0 \end{cases}$$

$$g(L_1, L_2) = \begin{cases} L_1 & \text{if } L_2 = \langle\rangle \\ g(\mathrm{cons}(x, L_1), L_3) & \text{if } L_2 = \mathrm{cons}(x, L_3) \end{cases}$$

ただし、f の定義の $x \cdot f(L')$ における $\cdot$ (点) は、2 つの実数の積 (multiplication) を表す。
これらに対して，以下の問に答えよ.

(4-a: 配点 4 点) $\mathrm{cons}(2.0, \mathrm{cons}(0.0, \mathrm{cons}(4.0, \langle\rangle))) \in \mathtt{RList}$ であることを定義に従って導きなさい。

(答) 定義の 1 番目より $\langle\rangle \in \mathtt{RList}$ である。

これと、$4.0 \in \mathcal{R}$ と定義の 2 番目を使い $\mathrm{cons}(4.0, \langle\rangle) \in \mathtt{RList}$ である。

これと、$0.0 \in \mathcal{R}$ と定義の 2 番目を使い $\mathrm{cons}(0.0, \mathrm{cons}(4.0, \langle\rangle)) \in \mathtt{RList}$ である。

これと、$2.0 \in \mathcal{R}$ と定義の 2 番目を使い $\mathrm{cons}(2.0, \mathrm{cons}(0.0, \mathrm{cons}(4.0, \langle\rangle))) \in \mathtt{RList}$ である。

(4-b: 配点 4 点) $f(\mathrm{cons}(2.0, \mathrm{cons}(0.0, \mathrm{cons}(4.0, \langle\rangle))))$ を定義に従って計算せよ。

(答) 以下の通り。

$$\begin{aligned} f(\mathrm{cons}(2.0, \mathrm{cons}(0.0, \mathrm{cons}(4.0, \langle\rangle)))) &= 2.0 \cdot f(\mathrm{cons}(0.0, \mathrm{cons}(4.0, \langle\rangle))) \\ &= 2.0 \cdot 0.0 \\ &= 0.0 \end{aligned}$$

(4-c: 配点 4 点) $g(\langle\rangle,\ \mathrm{cons}(2.0, \mathrm{cons}(0.0, \mathrm{cons}(4.0, \langle\rangle))))$ を定義に従って計算せよ。

(答) 以下の通り。

$$\begin{aligned} g(\langle\rangle,\ \mathrm{cons}(2.0, \mathrm{cons}(0.0, \mathrm{cons}(4.0, \langle\rangle)))) &= g(\mathrm{cons}(2.0, \langle\rangle),\ \mathrm{cons}(0.0, \mathrm{cons}(4.0, \langle\rangle))) \\ &= g(\mathrm{cons}(0.0, \mathrm{cons}(2.0, \langle\rangle)),\ \mathrm{cons}(4.0, \langle\rangle)) \\ &= g(\mathrm{cons}(4.0, \mathrm{cons}(0.0, \mathrm{cons}(2.0, \langle\rangle))),\ \langle\rangle) \\ &= \mathrm{cons}(4.0, \mathrm{cons}(0.0, \mathrm{cons}(2.0, \langle\rangle))) \end{aligned}$$

(4-d: 配点 9 点) 任意の $L_1, L_2 \in \mathtt{RList}$ に対して、$f(L_1) \cdot f(L_2) = f(g(L_1, L_2))$ であることを、リスト L_2 に関する帰納法で証明せよ。(注意: L_1 に関する帰納法を使うと証明できない。)

(答) L_2 に関する帰納法で、「任意の $L_1, L_2 \in \mathtt{RList}$ に対して、$f(L_1) \cdot f(L_2) = f(g(L_1, L_2))$ であること」を証明する。

(base case) $L_2 = \langle\rangle$ のとき、$f(L_1) \cdot f(L_2) = f(L_1) \cdot f(\langle\rangle) = f(L_1) \cdot 1.0 = f(L_1)$ である。また、$f(g(L_1, L_2)) = f(g(L_1, \langle\rangle)) = f(L_1)$ である。よっと両辺は等しい。

(step) L_2 に対して上式が成立すると仮定する。このとき L_2 を $\mathrm{cons}(x, L_2)$ で置きかえた式に対しても上式が成立すること言いたい。つまり、目標は、$f(L_1) \cdot f(\mathrm{cons}(x, L_2)) = f(g(L_1, \mathrm{cons}(x, L_2)))$ である。

左辺の計算: $f(L_1) \cdot f(\mathrm{cons}(x, L_2)) = f(L_1) \cdot x \cdot f(L_2)$ である。($x = 0.0$ の場合も、これと同じ値になる。)

右辺の計算: $f(g(L_1, \mathrm{cons}(x, L_2))) = f(g(\mathrm{cons}(x, L_1), L_2))$. ここで、帰納法の仮定を使うことができる ($g$ の第二引数が L_2 になっていることに注意) ので、$f(g(\mathrm{cons}(x, L_1), L_2)) = f(\mathrm{cons}(x, L_1)) \cdot f(L_2)$ である。これは $x \cdot f(L_1) \cdot f(L_2)$ に等しい。結局、左右両辺が同じ値であることがわかった。

以上から、L_2 に関する帰納法により、$f(L_1) \cdot f(\mathrm{cons}(x, L_2)) = f(g(L_1, \mathrm{cons}(x, L_2)))$ が、全ての $L_1, L_2 \in$ `RList` および $x \in \mathcal{R}$ に対して成立することが言えた。(証明終わり)

(補足) この証明を非常に厳密に眺める人がいたら、「本当に帰納法の仮定を使っていいのか」疑問に思ったかもしれない。つまり、帰納法において仮定してよいのは、$f(L_1) \cdot f(L_2) = f(g(L_1, L_2))$ であって、$f(\mathrm{cons}(x, L_1)) \cdot f(L_2) = f(g(\mathrm{cons}(x, L_1), L_2))$ ではない、と思う人もいるかもしれない。

この辺まで来ると、きちんと論理学を学んでからでないと説明ができないが、「それでも聞きたい」という人向けに若干補足しておくと、実は、上記で証明していたのは、「任意の $L_2, L_2 \in$ `RList` に対して、$f(L_1) \cdot f(L_2) = f(g(L_1, L_2))$ であること」ではなく、「任意の $L_2 \in$ `RList` に対して、「任意の $L_1 \in$ `RList` に対して、$f(L_1) \cdot f(L_2) = f(g(L_1, L_2))$ であること」」である。つまり、L_2 に関する帰納法 (一種のループ) の内側では、「任意の $L_1 \in$ `RList` に対して、$f(L_1) \cdot f(L_2) = f(g(L_1, L_2))$」ということを証明していたのである。つまり、入れ子になった二重ループである。この場合、L_1 の方は任意の要素を使ってよいので、上記の証明のような使い方が許される。(この説明でわかってもらえるとは思えないので、興味がある人は別の機会に質問してください。)

(4-e: 配点 4 点) 関数 `reverse`: `RList` $\to$ `RList` を、`reverse`$(L) = g(\langle\rangle, L)$ と定義する。このとき、$f($`reverse`$(L)) = f(L)$ であることを示しなさい。

(先に補足) これも一瞬帰納法の問題と思ったかもしれないが、120 分のテストで、まさか、帰納法を 2 問も出すわけがない。実は、(4-d) を使うとすぐに解ける問題である。もちろん、帰納法で解いてもよいが、そうすると (4-d) と実質的に同じことをもう 1 回やることになる。

(答) 前問 (4-d) で $L_1 = \langle\rangle, L_2 = L$ と置くと、$f(g(\langle\rangle,\ L)) = f(\langle\rangle) \cdot f(L)$ となる。よって、$f($`reverse`$(L)) = f(g(\langle\rangle,\ L)) = f(\langle\rangle) \cdot f(L) = 1.0 \cdot f(L) = f(L)$ となる。