離散構造 期末試験 (1,2 クラス用; 誤殖修正後の版)

2010 年 3 月 5 日 (金)

解答用紙は 2 枚である．**2 枚ともに**，学籍番号と氏名を記入すること．裏を使用してもよい．問題の順番通りに解答を記述する必要はないが，それぞれの解答には、必ず問題番号を明記せよ．

問 1 (論理)

(1-a) 「dvipdfm をインストールしていれば dvi ファイルを pdf ファイルに変換できる。」、「dvips をインストールしていれば dvi ファイルを ps ファイルに変換できる。」,「ps2pdf か acrobat をインストールしていれば ps ファイルを pdf ファイルに変換できる。」,「ps2pdf をインストールしていない。」,「dvi ファイルを pdf ファイルに変換できない。」、「dvips をインストールしている.」が成立している。

このとき、「dvipdfm をインストールしていない.」という結論を導けるかどうか (必ず，その結論が成立すると言えるかどうか) 答えなさい。

ただし、真理値表を使って解答せよ。また、本問を解くのに必要のない事実や原子命題を、真理値表に含める必要はない。

(1-b) 前問と同様の事実が成立しているとき、「acrobat をインストールしていない.」という結論を導けるか答えなさい.

(1-c) 論理記号 $-$ が，以下の真理値表を満たすとき，$A - B$ と同値な命題を，A, B, $\Rightarrow$, T, F を使って表現せよ．逆に、$A \Rightarrow B$ と同値な命題を，A, B, $-$, T, F を使って表現せよ．(使わない記号があってもよい。)

A	B	A − B
T	T	F
T	F	F
F	T	T
F	F	F

問 2 (集合と関数)

$\mathcal{N}^+$ を正の整数の集合 (0 を含まない) とし、関数 $f : \mathcal{N}^+ \to 2^{\mathcal{N}^+}$ と関数 $g, h : \mathcal{N}^+ \to \mathcal{N}^+$ を以下のように定義する。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \{y \in \mathcal{N}^+ \mid y \text{ は } x \text{ の正の約数 } (y \text{ is a positive divisor of } x)\} \\
g(x) &= \text{集合 } f(x) \text{ の要素数 (number of the elements in } f(x)) \\
h(x) &= \text{集合 } f(x) \text{ の要素の総和 (summation of all the elements in } f(x))
\end{aligned}
$$

たとえば、$f(6) = \{1, 2, 3, 6\}$, $g(6) = 4$, $h(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ である。このとき以下の問に答えよ。

(2-a) $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とするとき、像 $f(S)$ と像 $g(S)$ を計算しなさい。

(2-b) 関数 g は単射か、理由をつけて答えなさい。

(2-c) 関数 h は全射か、理由をつけて答えなさい。

(2-d) $g \circ h = h \circ g$ が成立するか、証明または反証しなさい。

(2-e) 「$f(x) \subset f(y)$ ならば $x \leq y$」が成立するか、証明または反証しなさい。

(2-f: この問は optional です) x と y が素数 (prime number) ならば、$g(xy) = g(x)g(y)$ が成立するか、証明または反証しなさい。

問 3 (関係とグラフ)

頂点の集合 $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ と、次の表で定義される辺の集合をもつ有向グラフ G を考える。

x \ y	1	2	3	4	5
1	×	○	×	×	×
2	×	×	○	×	○
3	×	×	×	○	○
4	a	×	×	○	○
5	×	×	×	×	×

頂点 i から頂点 j への辺があるとき $x = i$、$y = j$ の欄が○であり，辺がないとき×である．たとえば，頂点 2 から頂点 3 への辺はあるが，頂点 3 から頂点 2 への辺はない．表における a は、○または×を表す。

(3-a) $a = \times$ のとき、有向グラフ G を図示せよ。

(3-b) $a = \times$ のとき、頂点 1 を始点とする単純道のうち、最も長いものの 1 つを示しなさい。ただし、単純道とは、同じ辺を 2 回以上通らない道のことである (同じ頂点は 2 回以上通ってもよい)。

(3-c) V 上の二項関係 R を、$(x\ R\ y) \Leftrightarrow$ (G において x から y への辺がある) と定義する。a をうまく選ぶことによって、R が対称的 (symmetric) となることがあるか、理由とともに答えなさい。

(3-d) R を (3-c) と同様とする。$a =$ ○ の時、R、$R \circ R$、$(R \circ R) \circ R$ という 3 つの二項関係を考え、これらのうち推移律を満たすものがあるか、その理由とともに答えなさい。

問 4 (帰納と関数)

次の帰納的定義により、e 式の集合 E を定める．(定義される e 式を，地の文と区別するため、「..」で囲う.「」そのものは e 式の一部ではない。)

- 「1」と「2」 は，e 式である.
- e_1 と e_2 が e 式ならば,「$(e_1\ +\ e_2)$」 は e 式である.
- e_1 と e_2 が e 式ならば,「$(e_1\ -\ e_2)$」 は e 式である.

また、関数 $f : E \to E$, $g : E \to \mathcal{Z}$ を以下のように定義する.

$$f(e) = \begin{cases} e & \text{if } e = \text{「}1\text{」}, \text{「}2\text{」} \\ \text{「}(f(e_1) + f(e_2))\text{」} & \text{if } e = \text{「}(e_1\ +\ e_2)\text{」} \\ \text{「}(f(e_1) + f(e_2))\text{」} & \text{if } e = \text{「}(e_1\ -\ e_2)\text{」} \end{cases}$$

$$g(e) = \begin{cases} 1 & \text{if } e = \text{「}1\text{」} \\ 2 & \text{if } e = \text{「}2\text{」} \\ g(e_1) + g(e_2) & \text{if } e = \text{「}(e_1\ +\ e_2)\text{」} \\ g(e_1) - g(e_2) & \text{if } e = \text{「}(e_1\ -\ e_2)\text{」} \end{cases}$$

g の定義の $g(e_1) + g(e_2)$ における $+$ は、記号としての $+$ ではなく、自然数同士を足し合わせる演算 (加算) の意味である。

これらに対して，以下の問に答えよ.

(4-a)「$((1\ +\ 2)\ +\ (2\ +\ 1))$」は e 式であるかどうか、理由をつけて答えよ。

(4-b) $f($「$((2\ +\ 1)\ -\ 2)$」$)$ を求めよ.

(4-c) $g($「$((2\ +\ 1)\ -\ 2)$」$)$ を求めよ.

(4-d) e 式の「長さ」とは、その e 式に含まれる $+$ と $-$ の個数の合計とする。e 式の長さを計算する関数 $h : E \to \mathcal{N}$ を定義せよ。たとえば、$h($「$((2\ +\ 1)\ -\ 2)$」$) = 2$ である。

(4-e) 任意の e 式 e に対して，$|g(e)| \leq g(f(e))$ であることを，e 式に関する帰納法を使って証明せよ.