

離散構造 期末試験 (1,2クラス用) 解答例等

2010年3月5日(金)

問1 (論理: 配点25点)

(1-a: 7点) 以下のように基本命題(原子命題)を定める.

- A : 「dvipdfm をインストールしている。」
- B : 「dvips をインストールしている。」
- C : 「ps2pdf をインストールしている。」
- D : 「acrobat をインストールしている。」
- P : 「dvi ファイルを pdf ファイルに変換できる。」
- Q : 「dvi ファイルを ps ファイルに変換できる。」
- R : 「ps ファイルを pdf ファイルに変換できる。」

このとき, 問題文で与えられた事実は, 以下のように表現できる.

- $A \Rightarrow P$: 「dvipdfm をインストールしていれば dvi ファイルを pdf ファイルに変換できる。」
- $B \Rightarrow Q$: 「dvips をインストールしていれば dvi ファイルを ps ファイルに変換できる。」
- $(C \vee D) \Rightarrow R$: 「ps2pdf か acrobat をインストールしていれば ps ファイルを pdf ファイルに変換できる。」
- $\neg C$: 「ps2pdf をインストールしていない。」
- $\neg P$: 「dvi ファイルを pdf ファイルに変換できない。」
- B : 「dvips をインストールしている。」

これらが全て「真(T)」である.

さらに, 上記の基本命題の全てが互いに独立ではない。「dvi ファイルを ps ファイルに変換できて, ps ファイルを pdf ファイルに変換できる。」ということから、「dvi ファイルを pdf ファイルに変換できる」が導けると考えられるので,

- $(Q \wedge R) \Rightarrow P$

が常に成立すると考えられる. これは, 当然わかることだろうと思い, 問題文には明記しなかったが, これに気付かないために問(1-b)を解けなかった人がいた. この点は後述する.

さて, 問(1-a)は「 $\neg A$: dvipdfm をインストールしていない」が常に真かどうかを調べる問題である. これに対して, A, B, C, D, E, F, G をすべて含む真理値表を書くと, サイズが膨大になるが, 少し考えると, A と P に関係する部分のみに絞っても(成立する事実を削っても)「常に真」が言えることがわかる.

A	P	$A \Rightarrow P$	$\neg P$	$\neg A$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

この真理値表で, 問題文の条件により, $A \Rightarrow P$ と $\neg P$ が T のときであり, それは 4 行目しかない. このとき, $\neg A$ は T なので, 「dvipdfm をインストールしていない」という結論を導ける.

[補足] もちろん, A, P 以外の基本命題をいれた真理値表を書いてもよい.

(1-b: 8点) 前問と同様に解こうとしても、今度は、 A, B, C, D, P, Q, R の7つの基本命題が関係してしまう。前問の結果から A は偽 (F) であることがわかっているので、それを削ることはできるが、それでも基本命題が6つであり、真理値表は $2^6 = 64$ 行もあり、とても書けない。

そこで、少し工夫する。 $\neg C, \neg P, B, \neg A$ が成立していることから、 C, P, A は F であり、 B は T であることがわかる。そこでこれらの基本命題を含めずに、 D, Q, R だけを基本命題とする真理値表を書こう。(以下の真理値表の計算では、 $A = C = P = F$ と $B = T$ を使っている。)

D	Q	R	$B \Rightarrow Q$	$(C \vee D) \Rightarrow R$	$(Q \wedge R) \Rightarrow P$	$\neg D$
T	T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	F	T	F
T	F	T	F	T	T	F
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T

真理値表からわかるように、 $B \Rightarrow Q, (C \vee D) \Rightarrow R, (Q \wedge R) \Rightarrow P$ が全て T であるのは6行目だけであり、このとき $\neg D$ は T なので、「acrobat をインストールしていない」という結論を導ける。

[補足 1.] 上記の解答例では非常に丁寧に書いたが、問 (1-a), (1-b) では、答案の書き方や推論道筋はともかく、正しい推論で結論が導ければ正答とした。

[補足 2.] 問 (1-b) では「 $(Q \wedge R) \Rightarrow P$ 」が真であることに気付かずに誤答を得た人もいた。この事実に気付くことは、情報科学類の学生としては当然期待されることであるが、「この授業では、基本命題の中身については考えない。基本命題が真だろうと偽だろうと成立する命題 (恒真式) について、考える。」と言ってきたことと矛盾しているような気もする。そこで、上記の事実に気付かなかったこと以外はきちんとできていた (つまり、「正しく誤答を導いた」) 場合には、4点を与えた。

(1-c: 10点) \neg の真理値のパターンは、 T と F をひっくり返せば、 \Rightarrow の真理値パターンとよく似ている。これをよく考えると、 $\neg(A - B)$ は $B \Rightarrow A$ と同値であることがわかる。したがって、 $A - B$ は $\neg(B \Rightarrow A)$ と同値である。しかし、これではまだ \neg を使っているので、問題文の条件に合わない。そこで、 $\neg A$ を \Rightarrow で表現することを考えてみるが、これは $A \Rightarrow F$ と同値ということがわかる。結局、 $A - B$ は $(B \Rightarrow A) \Rightarrow F$ と同値である。

逆に、 \Rightarrow を \neg で表そう。上記の推論の途中で、 $\neg(A - B)$ と $B \Rightarrow A$ が同値であることがわかっている。そこで、 $A \Rightarrow B$ は、 $\neg(B - A)$ と同値であり、 $\neg A$ が $A - T$ と同値であることを使えば、最終的に、 $A \Rightarrow B$ は、 $(B - A) - T$ と同値となる。

[補足] この他の解答も多数存在する。どれを選ぼうと同値な命題をきちんと構成できていれば当然正解である。

問 2 (集合と関数: 25 点)

(2-a: 4点) [補足 1] これは、「関数による集合の像」を尋ねる問題である。単に「 $f(S)$ を求めよ」という問題にすると、「像」を求める問題であることに気付かない人が多いとおもったので、わざわざ、「像 $f(S)$ を求めよ」と書いたのだが、それでも、誤答が非常に多かったのは残念である。

($f(S)$ について) 像の定義により、 $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\} = \{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\}$ なので、それらを具体的に計算して、 $f(S) = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 5\}\}$ となる。(集合なので、要素をどの順番に書くかはどうでもよい。)

[補足 2] 直感的に考えると、和集合をとって $f(S) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とやってしまいそうである。そうではなく定義に忠実にきちんと書くことが必要である。(この「問 2」は、ほとんど関数の問題ばかりであるのにどう

して「関数と集合」の問題であるとしたかといえ、 f のコドメインがべき集合であったり、 $f(S)$ が、「自然数の集合の集合」の形をしていたりするからである。集合という概念がしっかり身につけていないと間違いやすい問題であった。）

答. ($g(S)$ について) $g(S) = \{g(1), g(2), g(3), g(4), g(5)\} = \{1, 2, 2, 3, 2\} = \{1, 2, 3\}$ である。

[補足 3] こちらは直感的にも簡単だったようだ。不思議なのは $\{1, 2, 2, 3, 2\}$ と書いた人が多かったことであり、これでももちろん正解だが、普通は $\{1, 2, 3\}$ と書くものであろう。

(2-b: 5 点) g は単射でない。理由: $g(2) = g(3) = 2$ となるので。

[補足 1] ちなみに g は、全射ではある。任意の正の整数 n に対して、 $g(2^{n-1}) = n$ となるので、 g のコドメインの要素である「正の整数」のすべてが g の値域にはいる。

(2-c: 5 点) h は全射でない。

理由: $h(x) = 2$ となる x は存在しない。なぜなら、もし、そのような x があるとしたら、 h の定義から、(x の正の約数の総和が 2 なので) x の約数は 2 だけとなるが、1 はどんな整数の約数でもあるので矛盾する。

[補足 1.] ちなみに h は単射でもない。 $h(14) = h(15) = 24$ なので。

(2-d: 5 点) $g \circ h = h \circ g$ は成立しない。反証: $(g \circ h)(2) = g(h(2)) = g(3) = 2$ であるが、 $(h \circ g)(2) = h(g(2)) = h(2) = 3$ であり、一致しない。

(2-e: 6 点) 「 $f(x) \subset f(y)$ ならば $x \leq y$ 」は成立する。証明: $f(x) \subset f(y)$ であると仮定すると、 x の約数はすべて y の約数である。 x 自身も x の約数なので、結局、 x は y の約数ということになる。よって、ある正の整数 m に対して $y = mx$ となり、 $x \leq y$ となる。

(2-f: オプション 5 点) 「 x と y が素数ならば $g(xy) = g(x)g(y)$ 」は成立しない。反証: $g(4) = 3$ で $g(2)g(2) = 2 \cdot 2 = 4$ となり、 x と y が素数であっても $g(xy) \neq g(x)g(y)$ となる。

[補足 1.] 当初予定では、この問題の解答は「成立する」であり、ごく簡単な証明問題のつもりだった。が、実は私が予定していた解答には穴があり、「成立しない」が正解であった。

つまり、 x と y が異なる素数であれば、 $g(xy) = g(x)g(y)$ が成立するのであるが、問題文では、 $x = y$ の場合を排除していない。そういう場合は、盲点になりやすいので、一種の「ひっかけ」問題になってしまった。(出題者自身がひっかかってしまった、ということである。)

期末試験において、こういう「ひっかけ」問題を出題するのは学生を騙しているみたいであり、私のポリシーに反するので、本問は「optional」とした。これに正答できた人は「プラス 5 点」とした。(つまり、105 点満点である。) なお、1 人だけ、「 $x \neq y$ ということが暗黙に仮定されているようなので、。。。」という答案を書いた人がおり、鋭いなあ、と、感心した。(感心しただけであり、ボーナス点をあげたわけではない。)

問 3 (関係とグラフ: 25 点)

(3-a: 5 点) 図 1 の通りである。

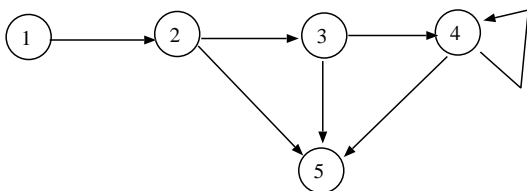


図 1: (3-a) の解答

(3-b: 5 点) グラフの絵からあきらかに、1,2,3,4,4,5 と通る長さ 5 の単純道が一番長い。

[補足] 授業での表現では、 $\langle 1, 2, 3, 4, 4, 5 \rangle$ だが、ここではどういう表現でもよいことにした。

(3-c: 5点) a をどう選んでも R が対称的になることはない。なぜなら、 R が対称的であるためには、 $1R2 \Rightarrow 2R1$ が必要であるが、 $1R2$ は成立するのに、 $2R1$ が不成立なので。

[補足] なぜか「 $1R4$ が成立する」とか「 $1R4$ が成立しない」と書いた人が多かったが、この問題の作意としては、「対称的かどうかは R 全体にかかわる性質」ということがわかっているかどうかであり、 a が だるうと \times だるうと、 R が対称的でないことがわかるかどうか試したものである。

(3-d: 10点) R は推移律を満たさない。理由: $1R2$ かつ $2R3$ だが $1R3$ でない。

$R^2 = R \circ R$ は推移律を満たさない。理由: $1R^23$ かつ $3R^24$ だが $1R^24$ でない。

$R^3 = (R \circ R) \circ R$ は推移律を満たさない。理由: $1R^34$ かつ $4R^32$ だが $1R^32$ でない。

[補足1] ここでは、非常に簡潔に書いてしまったが、もちろん、ちゃんとした解答としては、 $1R^23$ が成立する、とか $1R^24$ が成立しない、ということも、きちんと説明することが望ましい。

[補足2] $R \circ R$ などの合成関係がきちんと計算できているかどうか、と、推移律がわかっているかどうか、という2点を問う問題であり、どちらか一方だけがわかっている場合は部分点を与えた。なお、理由がなく答えだけ書いてあるものは零点である。(推移律を満たすか満たさないか、2つに1つなので、そんな「賭け」にあたって、得点はもらえない。)

問4 (帰納と関数: 25点)

[補足] この問題は、試験の途中で言ったように、 f の定義において「かっこ」が不足していて、若干不備があった。(厳密にいうと、 $f(e)$ が E 式にならない。) 正しい定義については、この web page にアップロードした問題 pdf ファイルを参照してほしい。出題ミスがあったので、どうしようかとおもったが、全員、そんな出題ミスは気にせず答えていたので、採点にあたって特別な対処はしなかった。(ちなみに、このミスに気付いたのは、TA の小鍛冶君ただ1人である。)

(4-a: 5点) e 式である。

理由: 「1」と「2」は e 式である。よって「 $(1 + 2)$ 」は e 式である。同様に、「 $(2 + 1)$ 」は e 式である。よって、「 $((1 + 2) + (2 + 1))$ 」は e 式である。

(4-b: 5点) 以下の計算の通り。

$$f((2 + 1) - 2) = (f(f(2 + 1)) + f(2)) = (f(2) + f(1) + 2) = ((2 + 1) + 2)。$$

[補足1] 上述のように、期末試験時に配布した問題では、「かっこ」が落ちていたので、答えが「 $2 + 1 + 2$ 」になったこととおもう。今回はこれでももちろん正解とした。また、「 f 」の使い方が微妙だったようで、「 $f(2 + 1) + 2$ 」といった不思議な答えもあったが、今回はそれでもいいことにした。

(4-c: 5点) 以下の計算の通り。

$$g((2 + 1) - 2) = g(2 + 1) - g(2) = (g(2) + g(1)) - g(2) = (2 + 1) - 2 = 1。$$

(4-d: 5点) 以下の通り。

$$h(e) = \begin{cases} 0 & \text{if } e = \text{「1」, 「2」} \\ h(e_1) + h(e_2) + 1 & \text{if } e = \text{「}(e_1 + e_2)\text{」} \\ h(e_1) + h(e_2) + 1 & \text{if } e = \text{「}(e_1 - e_2)\text{」} \end{cases}$$

[補足1.] 最後の2つのケースをまとめて書いても、もちろん、構わない。

誤答が多かったのは、 $h(e_1) + h(e_2) + 1$ というところを、 $h(e_1) + 1$ と書いてしまったものである。こういう定義をしてしまった人は、「自分が書いた定義があっているかどうかをチェックする方法」を習得するとよい。

これは、なにも難しいことではない。プログラミングにおいても、関数を定義すると思うが、「書いた瞬間」にすぐに完成と思う人はなく、必ずテストすると思う。同様に、本問でも、自分の定義がうまくいっている

かどうかわかるためには、たとえば、 $h(\lceil (2 + 1) - (2 + 1) \rceil)$ という値を計算して、(結果が 3 となることが期待される) 結果が期待通りになるか試してみればよい。 $h(e_1) + h(e_2) + 1$ というところを、 $h(e_1) + 1$ と書いてしまえば、このテストで結果が 2 となるので、定義が違っていることに気付くであろう。

(4-e: 5 点) 任意の e 式 e に対して、 $|g(e)| \leq g(f(e))$ であることを、 e 式に関する帰納法を使って証明する。

($e = \lceil 1 \rceil$ のとき) $|g(e)| = |1| = 1$, $g(f(e)) = g(\lceil 1 \rceil) = 1$. よって、 $|g(e)| \leq g(f(e))$ が成立.

($e = \lceil 2 \rceil$ のとき) $|g(e)| = |2| = 2$, $g(f(e)) = g(\lceil 2 \rceil) = 2$. よって、 $|g(e)| \leq g(f(e))$ が成立.

($e = \lceil (e_1 + e_2) \rceil$ のとき) $|g(e_1)| \leq g(f(e_1))$ と $|g(e_2)| \leq g(f(e_2))$ を仮定して (これらを「帰納法の仮定」と呼ぶ)、 $|g(e)| \leq g(f(e))$ を導く.

$|g(e)| = |g(e_1) + g(e_2)| \leq |g(e_1)| + |g(e_2)|$ であり、帰納法の仮定を使うと、 $|g(e_1)| + |g(e_2)| \leq g(f(e_1)) + g(f(e_2))$ である。一方、 $g(f(e)) = g(f(\lceil (e_1 + e_2) \rceil)) = g(\lceil (f(e_1) + f(e_2)) \rceil) = g(f(e_1)) + g(f(e_2))$ である。よって、 $|g(e)| \leq g(f(e))$ が導けた.

($e = \lceil (e_1 - e_2) \rceil$ のとき) $|g(e_1)| \leq g(f(e_1))$ と $|g(e_2)| \leq g(f(e_2))$ を仮定して (これらを「帰納法の仮定」と呼ぶ)、 $|g(e)| \leq g(f(e))$ を導く.

$|g(e)| = |g(e_1) - g(e_2)| \leq |g(e_1)| + |g(e_2)|$ であり、帰納法の仮定を使うと、 $|g(e_1)| + |g(e_2)| \leq g(f(e_1)) + g(f(e_2))$ である。一方、 $g(f(e)) = g(f(\lceil (e_1 - e_2) \rceil)) = g(\lceil (f(e_1) - f(e_2)) \rceil) = g(f(e_1)) + g(f(e_2))$ である。よって、 $|g(e)| \leq g(f(e))$ が導けた.

以上から、 e 式に関する帰納法を使って、任意の e 式 e に対して、 $|g(e)| \leq g(f(e))$ であることが証明できた.

[補足 1.] 前半の 2 つのケース、後半の 2 つのケースを、それぞれまとめて書いても、構わない。ただし、後半をまとめるときは、(+ と - の場合で少しかだけ違う部分があるので) きちんと両方のケースの違いを書かないといけなくて、「- のときも + と同様」という解答は、減点した。

また、帰納法を使う問題であるので、どこでどう帰納法の仮定を使ったかが、まったくわからない解答は、すこしだけ減点した。

[補足 2.] 本問は、演習でやった問題と非常によく似ていたもので、きちんと勉強してきた人には簡単だったと思う。多かった誤答は、「 e 式に関する帰納法」というものが理解できておらず、数学的帰納法 ($e = k$ のときに与式が成立することを仮定して、 $e = k + 1$ のときの与式を証明する) を使おうとしたものである。

[補足 3.] この問題では、最後の帰納法の問題が「ハイライト」であり、その配点を 10 点とか 15 点とかにすべきかと思ったのだが、そんなことをするとこの試験の平均点がわるくなりすぎるので、5 点にした。つまり、20-30 行の証明を完璧に書いてもたった 5 点という、cost performance の悪い問題となってしまった。もっとも、この問題がちゃんと解けた人は他の問題もよく解けていたので、結果的にはこれでも支障がないようだ。