離散構造 期末試験 (1,2 クラス用)

誤殖訂正済みバージョン

2009 年 3 月 6 日 (金)

解答用紙は 2 枚である．**2 枚ともに**，学籍番号と氏名を記入すること．裏を使用してもよい．問題の順番通りに解答を記述する必要はないが，それぞれの解答には、必ず問題番号を明記せよ．

問 1 (論理)

以下の各問において，四角 (□) の中に適当な論理記号をいれて，2 つの命題が同値になるようにしなさい．(四角にいれる論理記号を明記した上で，2 つの命題の真理値表を書いて，同値になることを示しなさい．) For each of the following questions, replace the box (□) by an appropriate logical symbol in order to make the two propositions logically equivalent. (Write the logical symbol as well as the truth table of each proposition.)

(1-a) $\neg(A \wedge B)$ と $(\neg A) \square (\neg B)$ が同値.

(1-b) $A \square (B \Rightarrow C)$ と $(A \wedge B) \Rightarrow C$ が同値.

(1-c) $(A \vee B) \Rightarrow C$ と $(A \Rightarrow C) \square (B \Rightarrow C)$ が同値.

問 2 (集合)

$\mathcal{N}$ を自然数の集合 (0 を含む) とする。$x \in \mathcal{N}$ に対して、集合 A_x を以下のように定義する。

$$A_x = \{n \in \mathcal{N} \mid n \text{ は } x \text{ の約数 (n is a divisor of x.)}\}$$

(2-a) 集合 A_6 を具体的に求めよ。

(2-b) 集合 $A_{12} - (A_2 \cup A_6)$ を具体的に求めよ。

(2-c) 任意の $x, y \in \mathcal{N}$ に対して、x が y の約数であれば、$A_x \subset A_y$ であることを示しなさい。

(2-d) $A_x \cup A_y = A_{xy} - \{xy\}$ が成立する x, y の例を 1 組示しなさい。

問 3 (関数)

$A = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 < x < 7\}$ とする。(両端の 0 と 7 を含まないことに注意せよ。) $i \in A$ に対して、部分関数 $f; A \to A$ と関数 $g_i : A \to A$ を次のように定義する.

$$f(x) = (2^x) \bmod 7$$
$$g_i(x) = (x^i) \bmod 7$$

ただし mod は整数を割った余りを求める演算である。たとえば、$f(2) = 4 \bmod 7 = 4$ であり、$g_3(4) = 64 \bmod 7 = 1$ である。

(3-a) f が A から A への関数であることを示しなさい。

(3-b) f による集合 A の像 (image) である $f(A)$ を求めよ。

(3-c) $((g_3 \circ f) \circ g_5)(4)$ の値を計算せよ。

(3-d) $i \in A$ とするとき、g_i に逆関数 (inverse function) が存在する i の値を全て求めよ。

問 4 (関係とグラフ)

頂点の集合 $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ と、次の表で定義される辺の集合をもつ有向グラフ G を考える。

x \ y	1	2	3	4	5
1	a	○	b	×	×
2	c	○	○	×	×
3	×	×	○	×	×
4	×	×	×	○	×
5	○	○	○	×	○

頂点 i から頂点 j への辺があるとき $x = i, y = j$ の欄が○であり，辺がないとき×である．たとえば，頂点 2 から頂点 3 への辺はあるが，頂点 3 から頂点 2 への辺はない．表における a, b, c は、○または×を表す。

(4-a) $a = \times$, $b = \times$, $c = \times$ のとき、有向グラフ G を図示せよ。(Illustrate the graph G.)

(4-b) $a = \times$, $b = \times$, $c = \times$ のとき、頂点 1 を始点とする単純道のうち、最も長いもの (1 つ) を示しなさい。ただし、単純道とは、同じ辺を 2 回以上通らない道のことである (同じ頂点は 2 回以上通ってもよい)。

(4-c) V 上の二項関係 R を、$(x\ R\ y) \Leftrightarrow$ (G において x から y への辺がある) と定義する。R が反射律を満たす (reflexive) ためには、上記の表の a, b, c がどのような条件を満たせばよいか。

(4-d) 前問の R が順序 (order) であるためには、表の a, b, c がどのような条件を満たせばよいか。

(4-e) R を (4-c) と同様とする。$a = \times$, $b = \times$, $c = \bigcirc$ の時、合成関係 $R \circ R$ に対応するグラフを図示せよ。

問 5 (帰納)

自然数のリストの集合 $List_{\mathcal{N}}$ は以下のように帰納的に定義される。

- $\langle\rangle \in List_{\mathcal{N}}$.
- $(n \in \mathcal{N} \wedge L \in List_{\mathcal{N}}) \Rightarrow \mathrm{cons}(n, L) \in List_{\mathcal{N}}$.

なお，$\mathrm{cons}(1, \mathrm{cons}(2, \langle\rangle))$ を $\langle 1, 2\rangle$ と書くこともある．

(5-a) 上記の定義にならって、「自然数が小さい順に並んでいるリスト」の集合 `OL` を帰納的に定義せよ。たとえば、$\mathrm{cons}(1, \mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(100, \langle\rangle)))) \in$ `OL` であり、$\mathrm{cons}(1, \mathrm{cons}(3, \mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(100, \langle\rangle)))) \notin$ `OL` である．

次に、関数 $f : List_{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$ を次のように定義する。

$$f(L) = \begin{cases} 0 & \text{if} \ \ L = \langle\rangle \\ 1 + f(L') & \text{if} \ \ L = \mathrm{cons}(x, L') \wedge (x \text{ が偶数 } (\textit{even number})) \\ f(L') & \text{if} \ \ L = \mathrm{cons}(x, L') \wedge (x \text{ が奇数 } (\textit{odd number})) \end{cases}$$

(5-b) $f(\mathrm{cons}(1, \mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(3, \langle\rangle))))$ を f の定義に従って計算しなさい.

(5-c) $L_1 = \mathrm{cons}(1, \mathrm{cons}(2, \langle\rangle))$, $L_2 = \mathrm{cons}(3, \mathrm{cons}(4, \langle\rangle))$ のとき $f(L_1 \oplus L_2)$ の値を計算しなさい。

ただし、$\oplus$ は、リストを連結する (concatenate) 関数であり、以下のように定義される。

$$L_1 \oplus L_2 = \begin{cases} L_2 & \text{if} \ \ L_1 = \langle\rangle \\ \mathrm{cons}(x,\ (L' \oplus L_2)) & \text{if} \ \ L_1 = \mathrm{cons}(x, L') \end{cases}$$

(5-d) 任意の $L_1, L_2 \in List_{\mathcal{N}}$ に対して、$f(L_1 \oplus L_2) = f(L_1) + f(L_2)$ を証明しなさい。ただし、L_1 に関する (リストの) 帰納法を用いなさい。

(問題は以上である．)